Rappels sur les écoulements compressibles monophasiques et détermination des conditions d'interface entre fluides

Richard Saurel

Objectifs

- Se remémorer quelques éléments essentiels (résumé du cours de M. Massoni en 4A).
- Se familiariser avec les calculs (il y a beaucoup de calculs dans la modélisation des écoulements diphasiques…).
- **Déterminer les conditions d'interface entre deux fluides.**

Conservation de la masse

$m = cste$ durant le processus étudié (Lavoisier, 1789).

Au cours du mouvement:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \qquad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}.\mathrm{grad}(f)$$ dérivée Lagrangienne

Mais, $m = \int_{V(t)} \rho dV$

$$\frac{d \int_{V(t)} \rho dV}{dt} = 0 \Leftrightarrow \int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \rho \vec{S}.\vec{n} dS = 0$$ Th. de Reynolds

$\vec{S}$ vitesse de la surface

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \rho \vec{S}.\vec{n} dS = 0$$

$\vec{S}$ vitesse de la surface

Si la surface est composée des molécules du même fluide et qu'elle se déforme durant le mouvement, alors

$\vec{S} = \vec{u}$ vitesse locale du fluide.

$$\int_{S(t)} \rho \vec{u}.\vec{n} dS = \int_{V(t)} \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dV$$

Théorème de Gauss, valide si la surface est fermée.

Alors,

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \right) dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

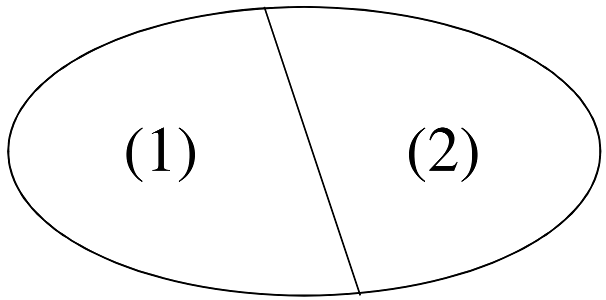
Forme Eulérienne de

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

Point de vue Eulérien vs point de vue Lagrangien...à discuter.

Et si le volume de contrôle contenait deux fluides ?

$$m = \int_{V_1(t)} \rho_1 dV + \int_{V_2(t)} \rho_2 dV$$



$$\frac{d \left(\int_{V_1(t)} \rho_1 dV + \int_{V_2(t)} \rho_2 dV \right)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \int_{V_1(t)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dV + \int_{S_1(t)} \rho_1 \vec{S}_1 . \vec{n}_1 dS + \int_{V_2(t)} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} dV + \int_{S_2(t)} \rho_2 \vec{S}_2 . \vec{n}_2 dS = 0$$

Sur une partie de la surface S_1, des particules de la phase 1 sont présentes.
Il en est de même pour une partie de la surface de la phase 2.
Mais sur l'interface….

$$\int_{V_1(t)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dV + \int_{S_1(t)} \rho_1 \vec{S}_1 . \vec{n}_1 dS + \int_{V_2(t)} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} dV + \int_{S_2(t)} \rho_2 \vec{S}_2 . \vec{n}_2 dS = 0$$

$$\int_{V_1(t)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dV + \int_{S_{1ouverte}(t)} \rho_1 u_1 . \vec{n}_1 dS + \int_{A_I(t)} \rho_1 \vec{S}_1 . \vec{n}_1 dS + \int_{V_2(t)} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} dV + \int_{S_{2ouverte}(t)} \rho_2 \vec{u}_2 . \vec{n}_2 dS + \int_{A_I(t)} \rho_2 \vec{S}_2 . \vec{n}_2 dS = 0$$

L’interface n’a qu’une vitesse: $\vec{S}_{1I} = \vec{S}_{2I} = \vec{S}_I$

$$\int_{V_1(t)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dV + \int_{S_{1ouverte}(t)} \rho_1 u_1 . \vec{n}_1 dS + \int_{A_I(t)} \rho_1 \vec{S}_I . \vec{n}_1 dS + \int_{V_2(t)} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} dV + \int_{S_{2ouverte}(t)} \rho_2 \vec{u}_2 . \vec{n}_2 dS + \int_{A_I(t)} \rho_2 \vec{S}_I . \vec{n}_2 dS = 0$$

Transformons les surfaces ouvertes en surfaces fermées

$$\int_{V_1(t)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dV + \int_{S_{1fermée}(t)} \rho_1 u_1 . \vec{n}_1 dS - \int_{A_I(t)} \rho_1 u_1 . \vec{n}_1 dS + \int_{A_I(t)} \rho_1 \vec{S}_I . \vec{n}_1 dS$$

$$+ \int_{V_2(t)} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} dV + \int_{S_{2fermée}(t)} \rho_2 \vec{u}_2 . \vec{n}_2 dS - \int_{A_I(t)} \rho_2 u_2 . \vec{n}_2 dS + \int_{A_I(t)} \rho_2 \vec{S}_I . \vec{n}_2 dS = 0$$

$$\int_{V_1(t)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dV + \int_{S_{1fermée}(t)} \rho_1 u_1.\vec{n}_1 dS - \int_{A_I(t)} \rho_1 u_1.\vec{n}_1 dS + \int_{A_I(t)} \rho_1 \vec{S}_I.\vec{n}_1 dS$$

$$+ \int_{V_2(t)} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} dV + \int_{S_{2fermée}(t)} \rho_2 \vec{u}_2.\vec{n}_2 dS - \int_{A_I(t)} \rho_2 u_2.\vec{n}_2 dS + \int_{A_I(t)} \rho_2 \vec{S}_I.\vec{n}_2 dS = 0$$

Devient,

$$\int_{V_1(t)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dV + \int_{S_{1fermée}(t)} \rho_1 u_1.\vec{n}_1 dS + \int_{A_I(t)} \rho_1 (\vec{S}_I - u_1).\vec{n}_1 dS$$

$$+ \int_{V_2(t)} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} dV + \int_{S_{2fermée}(t)} \rho_2 \vec{u}_2.\vec{n}_2 dS + \int_{A_I(t)} \rho_2 (\vec{S}_I - \vec{u}_2).\vec{n}_2 dS = 0$$

Après utilisation du théorème de Gauss,

$$\int_{V_1(t)} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_1 \vec{u}_1) \right) dV + \int_{V_2(t)} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_2 \vec{u}_2) \right) dV + \int_{A_I(t)} \left(\rho_1 (\vec{S}_I - \vec{u}_1).\vec{n}_1 + \rho_2 (\vec{S}_I - \vec{u}_2).\vec{n}_2 \right) dS = 0$$

$$\int_{V_1(t)} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_1 \vec{u}_1) \right) dV + \int_{V_2(t)} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_2 \vec{u}_2) \right) dV + \int_{A_I(t)} \left(\rho_1 (\vec{S}_I - \vec{u}_1).\vec{n}_1 + \rho_2 (\vec{S}_I - \vec{u}_2).\vec{n}_2 \right) dS = 0$$

Ceci doit être vrai pour tout V_1, V_2 et tout A_I. Alors il faut que:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_1 \vec{u}_1) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_2 \vec{u}_2) = 0$$

$$\rho_{1I} (\vec{S}_I - \vec{u}_{1I}).\vec{n}_{1I} + \rho_{2I} (\vec{S}_I - \vec{u}_{2I}).\vec{n}_{2I} = 0$$

condition d’interface sur la masse

On note $m_1 = \rho_{1I} (\vec{u}_{1I} - \vec{S}_I).\vec{n}_{1I}$ le débit masse de la phase 1 qui passe au travers de l’interface.

$m_2 = \rho_{2I} (\vec{u}_{2I} - \vec{S}_I).\vec{n}_{2I}$ débit masse de la phase 2 qui passe au travers de l’interface.

Ainsi, $m_1 + m_2 = 0$

On peut aussi remarquer que: $\vec{n}_{1I} + \vec{n}_{2I} = 0$

Alors,

$$\rho_{1I}(\vec{S} - \vec{u}_{1I}).\vec{n}_{1I} - \rho_{2I}(\vec{S} - \vec{u}_{2I}).\vec{n}_{1I} = 0$$

$$\rho_{1I}(\vec{S} - \vec{u}_{1I}).\vec{n}_{1I} = \rho_{2I}(\vec{S} - \vec{u}_{2I}).\vec{n}_{1I}$$

$$\rho_{1I}(\vec{u}_{1I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} = \rho_{2I}(\vec{u}_{2I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} = m = cste$$

Le débit masse qui passe au travers de l'interface suivant l'une ou l'autre normale est constant.

Conservation de la quantité de mouvement

$m\vec{\gamma} = \sum \text{Forces extérieures}$ durant le processus étudié (Newton, 1726)

(antérieur à la conservation de la masse!)

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

ou,

$$\frac{dm\vec{u}}{dt} = \vec{F}_{ext} \quad \text{puisque} \quad \frac{dm}{dt} = 0$$

Ici, $m\vec{u}$ est remplacé par: $\int_{V(t)} \rho\vec{u}dV$

Et $\vec{F}_{ext} = -\int_{S(t)} p\vec{n}dS$

Donc: $$\frac{d\int_{V(t)} \rho\vec{u}dV}{dt} = -\int_{S(t)} p\vec{n}dS$$

$$\frac{d\int_{V(t)}\rho\vec{u}\,dV}{dt}=-\int_{S(t)}p\vec{n}\,dS$$

Il faut maintenant appliquer le théorème de Reynolds.

$$\int_{V(t)}\frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t}dV+\int_{S(t)}\rho\vec{u}\left(\vec{S}.\vec{n}\right)dS=-\int_{S(t)}p\vec{n}\,dS$$

De nouveau, l'ensemble de la surface est occupé par des particules fluides ayant la vitesse u. Ainsi,

$$\int_{V(t)}\frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t}dV+\int_{S(t)}\left(\rho\vec{u}\left(\vec{u}.\vec{n}\right)+p\vec{n}\right)dS=0$$

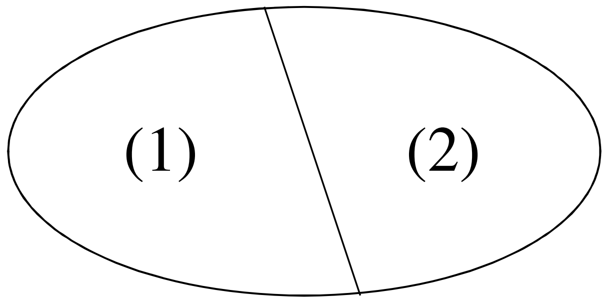
En utilisant le th. de Gauss,

$$\int_{V(t)}\left(\frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})+\mathrm{grad}(p)\right)dV=0$$

Equation d'Euler (1753)

$$\frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})+\mathrm{grad}(p)=0$$

Et si le volume de contrôle contenait deux fluides ?



$$\frac{d\left(\int_{V_1(t)} \rho_1 \vec{u}_1 dV + \int_{V_2(t)} \rho_2 \vec{u}_2 dV\right)}{dt} = -\int_{S_1(t)} p_1 n_1 dS - \int_{S_2(t)} p_2 n_2 dS$$

Les surfaces S_1 et S_2 sont ouvertes. L'ensemble des deux surfaces forme une surface fermée.

$$\frac{d\left(\int_{V_1(t)}\rho_1\vec{u}_1 dV+\int_{V_2(t)}\rho_2\vec{u}_2 dV\right)}{dt}=-\int_{S_1(t)}p_1 n_1 dS-\int_{S_2(t)}p_2 n_2 dS$$

On applique le Th. de Reynolds

$$\int_{V_1(t)}\frac{\partial\rho_1\vec{u}_1}{\partial t}dV+\int_{S_{1ouverte}(t)}\rho_1\vec{u}_1(\vec{u}_1.\vec{n}_1)dS+\int_{A_I(t)}\rho_1\vec{u}_1(\vec{S}.\vec{n}_1)dS$$

$$+\int_{V_2(t)}\frac{\partial\rho_2\vec{u}_2}{\partial t}dV+\int_{S_{2ouverte}(t)}\rho_2\vec{u}_2(\vec{u}_2.\vec{n}_2)dS+\int_{A_I(t)}\rho_2\vec{u}_2(\vec{S}.\vec{n}_2)dS=-\int_{S_{1ouverte}(t)}p_1 n_1 dS-\int_{S_{2ouverte}(t)}p_2 n_2 dS$$

On transforme les surfaces ouvertes en surfaces fermées

$$\int_{V_1(t)}\frac{\partial\rho_1\vec{u}_1}{\partial t}dV+\int_{S_{1fermée}(t)}\rho_1\vec{u}_1(\vec{u}_1.\vec{n}_1)dS-\int_{A_I(t)}\rho_1\vec{u}_1(\vec{u}_1.\vec{n}_1)dS+\int_{A_I(t)}\rho_1\vec{u}_1(\vec{S}.\vec{n}_1)dS$$

$$+\int_{V_2(t)}\frac{\partial\rho_2\vec{u}_2}{\partial t}dV+\int_{S_{2fermée}(t)}\rho_2\vec{u}_2(\vec{u}_2.\vec{n}_2)dS-\int_{A_I(t)}\rho_2\vec{u}_2(\vec{u}_2.\vec{n}_2)dS+\int\rho_2\vec{u}_2(\vec{S}.\vec{n}_2)dS=$$

$$-\int_{S_{1fermée}(t)}p_1 n_1 dS+\int_{A_I(t)}p_1 n_1 dS-\int_{S_{2fermée}(t)}p_2 n_2 dS+\int_{A_I(t)}p_2 n_2 dS$$

$$\int_{V_1(t)} \frac{\partial \rho_1 \vec{u}_1}{\partial t} dV + \int_{S_{1fermée}(t)} \rho_1 \vec{u}_1 (\vec{u}_1 . \vec{n}_1) dS - \int_{A_I(t)} \rho_1 \vec{u}_1 (\vec{u}_1 . \vec{n}_1) dS + \int_{A_I(t)} \rho_1 \vec{u}_1 (\vec{S} . \vec{n}_1) dS$$

$$+ \int_{V_2(t)} \frac{\partial \rho_2 \vec{u}_2}{\partial t} dV + \int_{S_{2fermée}(t)} \rho_2 \vec{u}_2 (\vec{u}_2 . \vec{n}_2) dS - \int_{A_I(t)} \rho_2 \vec{u}_2 (\vec{u}_2 . \vec{n}_2) dS + \int \rho_2 \vec{u}_2 (\vec{S} . \vec{n}_2) dS =$$

$$- \int_{S_{1fermée}(t)} p_1 n_1 dS + \int_{A_I(t)} p_1 n_1 dS - \int_{S_{2fermée}(t)} p_2 n_2 dS + \int_{A_I(t)} p_2 n_2 dS$$

On arrange un peu …

$$\int_{V_1(t)} \frac{\partial \rho_1 \vec{u}_1}{\partial t} dV + \int_{S_{1fermée}(t)} \rho_1 \vec{u}_1 (\vec{u}_1 . \vec{n}_1) dS + \int_{S_{1fermée}(t)} p_1 \vec{n}_1 dS$$

$$+ \int_{V_2(t)} \frac{\partial \rho_2 \vec{u}_2}{\partial t} dV + \int_{S_{2fermée}(t)} \rho_2 \vec{u}_2 (\vec{u}_2 . \vec{n}_2) dS + \int_{S_{2fermée}(t)} p_2 \vec{n}_2 dS$$

$$+ \int_{A_I(t)} \left(\rho_1 \vec{u}_1 (\vec{S} - \vec{u}_1) . \vec{n}_1 - p_1 \vec{n}_1 + \rho_2 \vec{u}_2 (\vec{S} - \vec{u}_2) . \vec{n}_2 - p_2 \vec{n}_2 \right) dS = 0$$

$$\int_{V_1(t)} \frac{\partial \rho_1 \vec{u}_1}{\partial t} dV + \int_{S_{1fermée}(t)} \rho_1 \vec{u}_1 (\vec{u}_1 . \vec{n}_1) dS + \int_{S_{1fermée}(t)} p_1 \vec{n}_1 dS$$

$$+ \int_{V_2(t)} \frac{\partial \rho_2 \vec{u}_2}{\partial t} dV + \int_{S_{2fermée}(t)} \rho_2 \vec{u}_2 (\vec{u}_2 . \vec{n}_2) dS + \int_{S_{2fermée}(t)} p_2 \vec{n}_2 dS$$

$$+ \int_{A_I(t)} \left(\rho_1 \vec{u}_1 (\vec{S} - \vec{u}_1) . \vec{n}_1 - p_1 \vec{n}_1 + \rho_2 \vec{u}_2 (\vec{S} - \vec{u}_2) . \vec{n}_2 - p_2 \vec{n}_2 \right) dS = 0$$

On utilise le Th. de Gauss

$$\int_{V_1(t)} \left(\frac{\partial \rho_1 \vec{u}_1}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_1 \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1) + \mathrm{grad}(p_1) \right) dV$$

$$+ \int_{V_2(t)} \left(\frac{\partial \rho_2 \vec{u}_2}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_2 \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2) + \mathrm{grad}(p_2) \right)$$

$$- \int_{A_I(t)} \left(\rho_1 \vec{u}_1 (\vec{u}_1 - \vec{S}) . \vec{n}_1 + p_1 \vec{n}_1 + \rho_2 \vec{u}_2 (\vec{u}_2 - \vec{S}) . \vec{n}_2 + p_2 \vec{n}_2 \right) dS = 0$$

Ceci doit être vrai pour tout V_1, V_2 et tout A_I. Alors il faut que:

$$\frac{\partial \rho_1 \vec{u}_1}{\partial t} + div(\rho_1 \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1) + grad(p_1) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_2 \vec{u}_2}{\partial t} + div(\rho_2 \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2) + grad(p_2) = 0$$

$$\rho_{1I} \vec{u}_{1I} (\vec{u}_{1I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} + p_{1I} \vec{n}_{1I} + \rho_{2I} \vec{u}_{2I} (\vec{u}_{2I} - \vec{S}).\vec{n}_{2I} + p_{2I} \vec{n}_{2I} = 0$$

condition d’interface sur la qdm

On peut aussi l’écrire comme suit. On a noté pour la masse:

$$\rho_{1I} (\vec{u}_{1I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} = \rho_{2I} (\vec{u}_{2I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} = m = cste$$

$$\rho_{1I} \vec{u}_{1I} (\vec{u}_{1I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} + p_{1I} \vec{n}_{1I} - \rho_{2I} \vec{u}_{2I} (\vec{u}_{2I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} - p_{2I} \vec{n}_{1I} = 0$$

$$\rho_{1I} \vec{u}_{1I} (\vec{u}_{1I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} + p_{1I} \vec{n}_{1I} = \rho_{2I} \vec{u}_{2I} (\vec{u}_{2I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} + p_{2I} \vec{n}_{1I}$$

$$m \vec{u}_{1I} + p_{1I} \vec{n}_{1I} = m \vec{u}_{2I} + p_{2I} \vec{n}_{1I}$$

autre forme de la condition d’interface sur la qdm

Remarque essentielle

L'équation de masse d'un fluide compressible s'écrit:

$$\int_{V(t)} \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \rho\left(\vec{u}.\vec{n}\right) dS = 0$$

Et conduit à la condition d'interface:

$$\rho_{1I}(\vec{u}_{1I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} = \rho_{2I}(\vec{u}_{2I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} = m = cste$$

C'est à dire,

$$\rho_{kI}\vec{u}_{kI}.\vec{n}_I - \rho_{kI}\vec{S}\vec{n}_I = cste$$

Ou encore,

$$\text{flux suivant la normale} - \text{variable conservative } \vec{S}\vec{n}_I = cste$$

$$\text{flux suivant la normale} - \text{variable conservative } \vec{S}.\vec{n}_I = \text{cste}$$

Ceci marche-t-il pour la qdm ?

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \left(\rho \vec{u} \left(\vec{u}.\vec{n} \right) + p\,\vec{n} \right) dS = 0$$

$$\text{flux suivant la normale} - \text{variable conservative } \vec{S}.\vec{n}_I = \text{cste}$$

$$\rho \vec{u} \left(\vec{u}.\vec{n} \right) + p\vec{n} - \rho \vec{u}\ \vec{S}.\vec{n}_I = \text{cste}$$

$$\rho \vec{u} \left(\vec{u} - \vec{S} \right).\vec{n} + p\vec{n} = \text{cste}$$

Ce qui correspond à ce que nous avons trouvé au préalable:

$$\rho_{1I} \vec{u}_{1I} (\vec{u}_{1I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} + p_{1I} \vec{n}_{1I} = \rho_{2I} \vec{u}_{2I} (\vec{u}_{2I} - \vec{S}).\vec{n}_{1I} + p_{2I} \vec{n}_{1I}$$

Pour n'importe quelle équation sous la forme:

$$\int_{V(t)} \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \vec{F}.\vec{n}\, dS = 0$$

Les relations de saut (ou conditions d'interface) s'écrivent:

$$\vec{F}.\vec{n} - U\vec{S}.\vec{n} = cste$$

où $\vec{S}$ est la vitesse de l'interface.

Appliquons ceci à l'équation d'énergie

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t}+\mathrm{div}\left((\rho E+p)\vec{u}\right)=0 \qquad E=e+\frac{1}{2}\vec{u}.\vec{u}$$

$$\int_{V(t)}\frac{\partial \rho E}{\partial t}dV+\int_{S(t)}\left(\rho E+p\right)(\vec{u}.\vec{n})dS=0$$

$$\vec{F}.\vec{n}-U\vec{S}.\vec{n}=cste \quad \text{devient} \quad \left(\rho E+p\right)(\vec{u}.\vec{n})-\rho E\vec{S}.\vec{n}=cste$$

$$\rho E(\vec{u}-\vec{S}).\vec{n}+p(\vec{u}.\vec{n})=cste$$

$$mE+p(\vec{u}.\vec{n})=cste$$

Si la conduction de la chaleur est présente, on a immédiatement le résultat:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t}+\mathrm{div}\left((\rho E+p)\vec{u}-\lambda \mathrm{grad}(T)\right)=0 \Rightarrow \rho E(\vec{u}-\vec{S}).\vec{n}+p(\vec{u}.\vec{n})-\lambda \mathrm{grad}(T).\vec{n}=cste$$

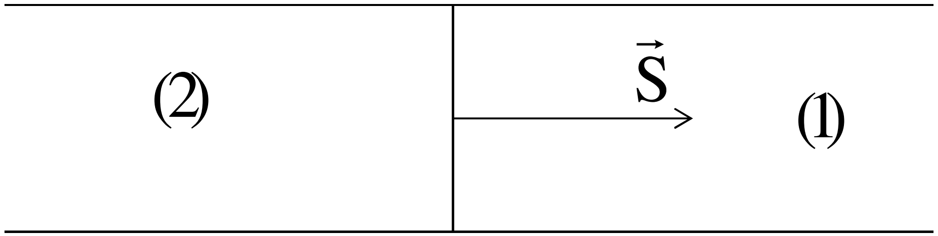
Conditions d'interface

$$\rho_1(\vec{u}_1-\vec{S}).\vec{n}=\rho_2(\vec{u}_2-\vec{S}).\vec{n}$$

$$\rho_1\vec{u}_1(\vec{u}_1-\vec{S}).\vec{n}+p_1\vec{n}=\rho_2\vec{u}_2(\vec{u}_2-\vec{S}).\vec{n}+p_2\vec{n}$$

$$\rho_1E_1(\vec{u}_1-\vec{S}).\vec{n}+p_1(\vec{u}_1.\vec{n})-\lambda_1\vec{grad}(T_1).\vec{n}=\rho_2E_2(\vec{u}_2-\vec{S}).\vec{n}+p_2(\vec{u}_2.\vec{n})-\lambda_2\vec{grad}(T_2).\vec{n}$$

Cas 1D :



$$\vec{n}=\vec{i};\quad \vec{u}_1=u_1\vec{i};\quad \vec{u}_2=u_2\vec{i};\quad \vec{S}=S\vec{i}$$

$$\rho_1(u_1-S)=\rho_2(u_2-S)$$

$$\rho_1u_1(u_1-S)+p_1=\rho_2u_2(u_2-S)+p_2$$

$$\rho_1E_1(u_1-S)+p_1u_1-\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}=\rho_2E_2(u_2-S)+p_2u_2-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}$$

Pour s'en souvenir rapidement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial \rho u^2+p}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t}+\frac{\partial (\rho E+p)u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

relations de saut

$$F-SU=cste$$

$$\rho_1(u_1-S)=\rho_2(u_2-S)$$

$$\rho_1u_1(u_1-S)+p_1=\rho_2u_2(u_2-S)+p_2$$

$$\rho_1E_1(u_1-S)+p_1u_1=\rho_2E_2(u_2-S)+p_2u_2$$

(les flux de chaleur ont été omis ici)

Analyse de ces conditions d'interface

On se place dans le cas 1D, qui est déjà très riche en enseignements.

Premier cas: fronts supersoniques→ ondes de choc = les conditions d'interface reviennent au relations de Rankine-Hugoniot,

$$\rho_1(u_1 - S) = \rho_2(u_2 - S)$$

$$\rho_1 u_1(u_1 - S) + p_1 = \rho_2 u_2(u_2 - S) + p_2$$

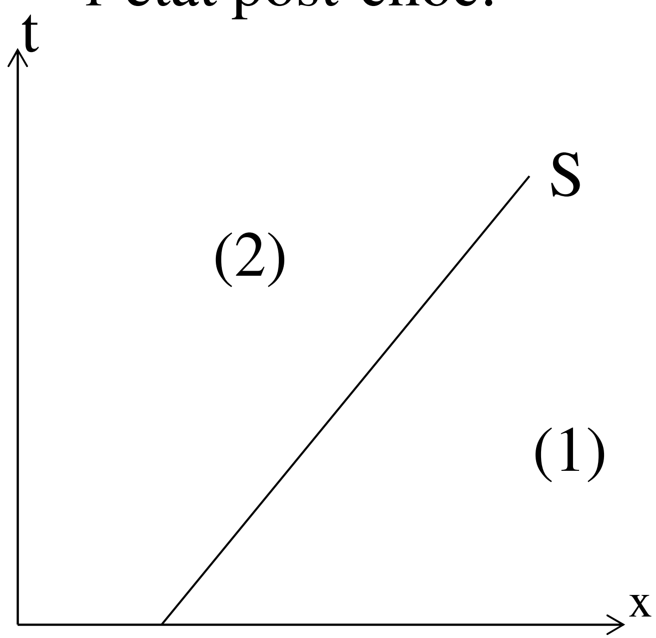
$$\rho_1 E_1(u_1 - S) + p_1 u_1 = \rho_2 E_2(u_2 - S) + p_2 u_2$$

Le milieu (1) est parfaitement connu.

Les inconnues du système sont:

$$\rho_2 ; u_2 ; S ; p_2 ; E_2$$

Le milieu (1) est l'état initial, et le milieu 2 correspond à l'état post-choc.



Chocs → 5 inconnues et 3 relations

$\rho_2 ; u_2 ; S ; p_2 ; E_2$

$$\rho_1(u_1 - S) = \rho_2(u_2 - S)$$

$$\rho_1 u_1(u_1 - S) + p_1 = \rho_2 u_2(u_2 - S) + p_2$$

$$\rho_1 E_1(u_1 - S) + p_1 u_1 = \rho_2 E_2(u_2 - S) + p_2 u_2$$

Mais il y a une équation d'état: $p_2 = p_2(\rho_2, e_2)$ $(p_2 = (\gamma_2 - 1)\rho_2 e_2 \text{ par exemple})$
Avec $E_2 = e_2 + \frac{1}{2}u_2^2$

Donc 4 relations et 5 inconnues → famille de solutions.
Il faudra fixer une variable dans l'état (2) et toutes les autres s'en déduiront.
Par exemple fixer la vitesse du choc S, ou la vitesse du piston u_2 …
N'importe quelle variable dans l'état 2 fixe les autres, c'est pourquoi on parle de 'familles de solutions'.

Deuxième cas: Surfaces de simple contact

$$\rho_1(u_1 - S) = \rho_2(u_2 - S)$$

$$\rho_1 u_1(u_1 - S) + p_1 = \rho_2 u_2(u_2 - S) + p_2$$

$$\rho_1 E_1(u_1 - S) + p_1 u_1 = \rho_2 E_2(u_2 - S) + p_2 u_2$$

Dans le cas des surfaces de contact: $S = u_1$

Ceci implique $\rho_1(u_1 - S) = 0 = \rho_2(u_2 - S) \Rightarrow S = u_2$

Ainsi: $S = u_1 = u_2$

La relation de saut sur la qdm implique: $p_1 = p_2$

L'équation d'énergie confirme simplement les résultats précédents: $p_1 u_1 = p_2 u_2$

Troisième cas: Fronts subsoniques (flammes, fronts d'évaporation, fronts de fissuration …). Chaque cas particulier présente des spécificités mais obéit à:

$$\rho_1(u_1-S)=\rho_2(u_2-S)$$

$$\rho_1u_1(u_1-S)+p_1=\rho_2u_2(u_2-S)+p_2$$

$$\rho_1E_1(u_1-S)+p_1u_1=\rho_2E_2(u_2-S)+p_2u_2$$

Inconnues: $\rho_2;u_2;S;p_2;E_2$ mais aussi $\rho_1;u_1;p_1;E_1$ = 9 inconnues.
En effet, le front subsonique est précédé d'une onde acoustique qui change les caractéristiques du milieu (1). Dans le cas supersonique, rien ne précède le choc.
On a donc 3 relations + 2 équations d'état = 5
Il manque 4 équations.
Ceci est assez compliqué.
Cherchons à simplifier et négligeons l'effet du précurseur acoustique. L'état (1) est alors supposé connu.
On a maintenant 3 relations + 1 équation d'état = 4 relations et 5 inconnues (comme pour les chocs).

Relation cinétique

La relation qui manque est dénommée 'relation cinétique' car elle détermine la vitesse du front et tout le reste de l'état (2).

Nous allons examiner un exemple sur le cas particulier des fronts d'évaporation.

Simplifions un peu le problème. Le front est supposé se propager avec une vitesse très inférieure à la vitesse du son. Ainsi les ondes acoustiques tranversent le front plusieurs fois durant son parcours et rendent la pression uniforme. C'est le cas des flammes de déflagration, des fronts d'évaporation etc. Dans ce cas, $p_1 = p_2 = p$

Dans cette limite, l'équation sur la qdm n'est plus utilisable:

$$\rho_1 u_1 (u_1 - S) + p_1 = \rho_2 u_2 (u_2 - S) + p_2$$

Devient, $\rho_1 u_1 (u_1 - S) = \rho_2 u_2 (u_2 - S) \longrightarrow m u_1 = m u_2 \longrightarrow u_1 = u_2$

Ce qui n'est vrai que pour les surfaces de contact.

On a donc deux relations utilisables seulement, avec la donnée de p:

$\rho_1 (u_1 - S) = \rho_2 (u_2 - S)$ inconnues: $S; \rho_2; u_2; E_2$

$\rho_1 E_1 (u_1 - S) + p u_1 = \rho_2 E_2 (u_2 - S) + p u_2$ ou : $S, \rho_2; u_2; e_2$

Continuons…

$$\rho_1(u_1-S)=\rho_2(u_2-S)$$

$$\rho_1E_1(u_1-S)+pu_1=\rho_2E_2(u_2-S)+pu_2$$

$$S\,;\rho_2\,;u_2\,;e_2=e_2(p,\rho_2)$$

par exemple $e_2=\dfrac{p}{\rho_2(\gamma_2-1)}$

Il reste donc 3 inconnues et 2 relations.

Considérons le cas d'un front d'évaporation entre un liquide (1) et sa vapeur (2). Il faut alors ajouter un peu de physique dans le système précédent:

$$\rho_1(u_1-S)=\rho_2(u_2-S)$$

$$\rho_1E_1(u_1-S)+pu_1-\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}=\rho_2E_2(u_2-S)+pu_2-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}$$

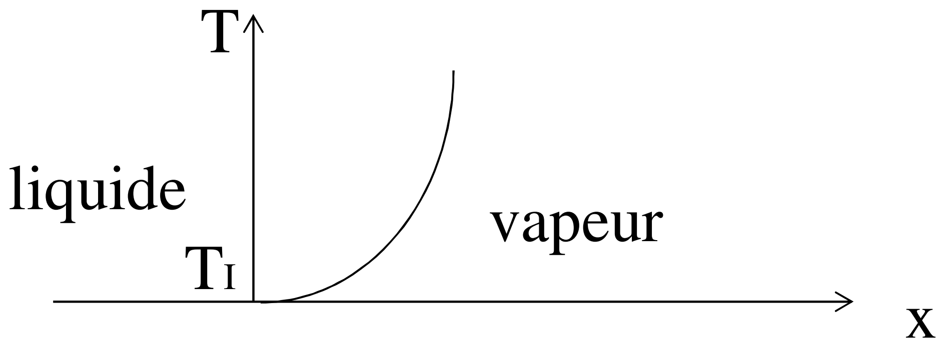
Simplifions encore…

$$\rho_1(u_1-S)=\rho_2(u_2-S)$$

$$\rho_1E_1(u_1-S)+pu_1-\cancel{\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}}=\rho_2E_2(u_2-S)+pu_2-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}$$

On néglige la perte de chaleur dans la couche de liquide.
Puis on approxime le flux de chaleur dans la vapeur à l'aide d'une corrélation:

$$-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}=h_c(T_I-T_2)$$



$$\rho_1(u_1-S)=\rho_2(u_2-S)=m$$

$$\rho_1E_1(u_1-S)+pu_1=\rho_2E_2(u_2-S)+pu_2+h(T_I-T_2)$$

$$S\,;\rho_2\,;u_2\,;T_I$$

$$m(E_1-E_2)+p(u_1-u_2)=h(T_I-T_2)$$

$$u_2=\frac{m}{\rho_2}+S;\quad u_1=\frac{m}{\rho_1}+S;\quad \text{donc}\quad u_1-u_2=m\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)$$

$$m(E_1-E_2)+p(u_1-u_2)=h(T_I-T_2)$$

$$m(E_1-E_2)+pm(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2})=h(T_I-T_2)$$

$$m(H_1-H_2)=h(T_I-T_2)$$

$$m=\frac{h(T_I-T_2)}{H_1-H_2}$$

Puis on néglige les énergies cinétiques devant les énergies internes:

$$m=\frac{h(T_I-T_2)}{h_1-h_2}=\frac{h(T_I-T_2)}{h_{liquide}-h_{vapeur}}=-\frac{h(T_I-T_2)}{L_V(T_I)}$$

Il reste alors une seule inconnue: T_I.

Equilibre thermodynamique local

L'interface est supposée à l'équilibre thermodynamique local:

$$g_1(T_I,p)=g_2(T_I,p)$$

Ce qui implique la relation de saturation (qui est ici la relation cinétique):

$$T_I=T_{sat}(p)$$

Le problème est désormais fermé (et résolu):

$$m=-\frac{h(T_{sat}(p)-T_2)}{L_V(p)}$$

On déduit ensuite les autres variables.

- Le cas des flammes de déflagration est plus compliqué et nécessite un cours spécifique.
- Le cas des détonations n’est pas très compliqué mais est un peu hors propos.

Continuons dans la modélisation des écoulements diphasiques.