



# Eléments des méthodes numériques pour la résolution des équations de Saint-Venant

Richard Saurel

[Richard.Saurel@univ-amu.fr](mailto:Richard.Saurel@univ-amu.fr)

Les équations de St Venant présentent de nombreuses similitudes avec les équations d'Euler de la dynamique des gaz.

Ces systèmes d'équations font partie de la catégorie des équations hyperboliques (valeurs propres de la matrice  $A(W)$  réelles).

Ici, les équations admettent une forme conservative, ce qui n'est pas le cas de tous les modèles d'écoulement :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

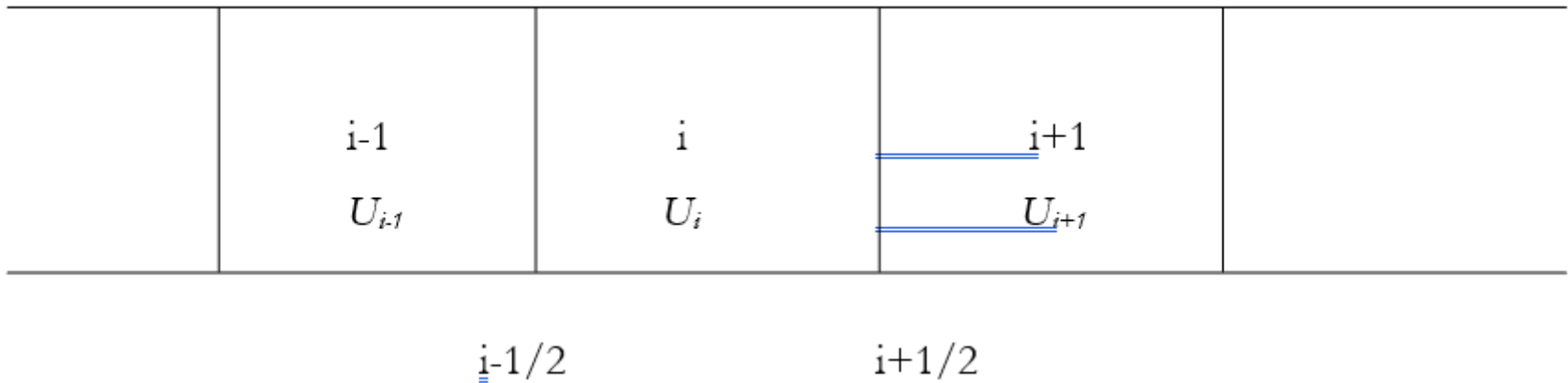
Ces équations génèrent des ondes de choc qu'il est nécessaire de capturer.

La méthode la plus adaptée à ce contexte est la méthode de Godunov (1959), qui s'est imposée devant la méthode de von Neumann et beaucoup d'autres.

Des améliorations de la méthode de Godunov ont été apportées et continuent à être apportées .... mais ses bases sont inchangées. On va donc essayer d'acquérir ces bases dans ce qui suit.

# Devant un problème complexe ... toujours commencer en 1D

Considérons un canal rectiligne décomposé en cellules ou volumes de contrôle :

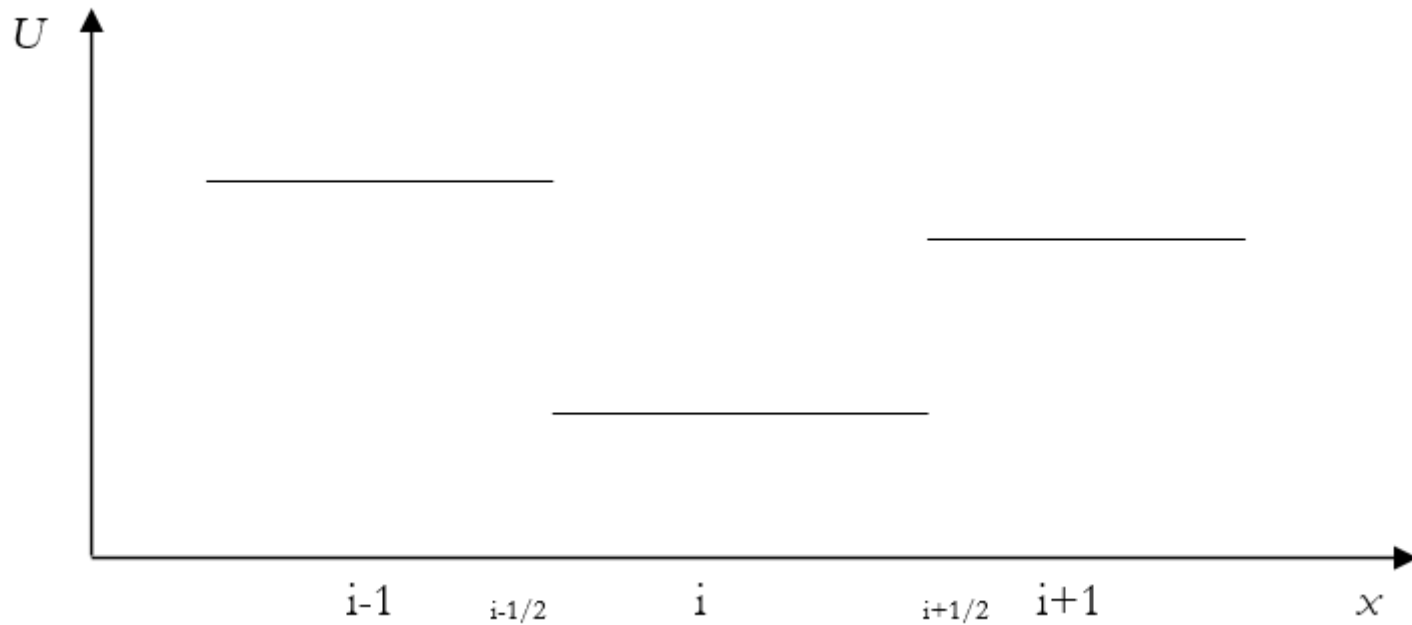


Une cellule comporte un centre de maille, noté  $i$ .

Un bord d'entrée, noté  $i-1/2$ .

Un bord de sortie, noté  $i+1/2$ .

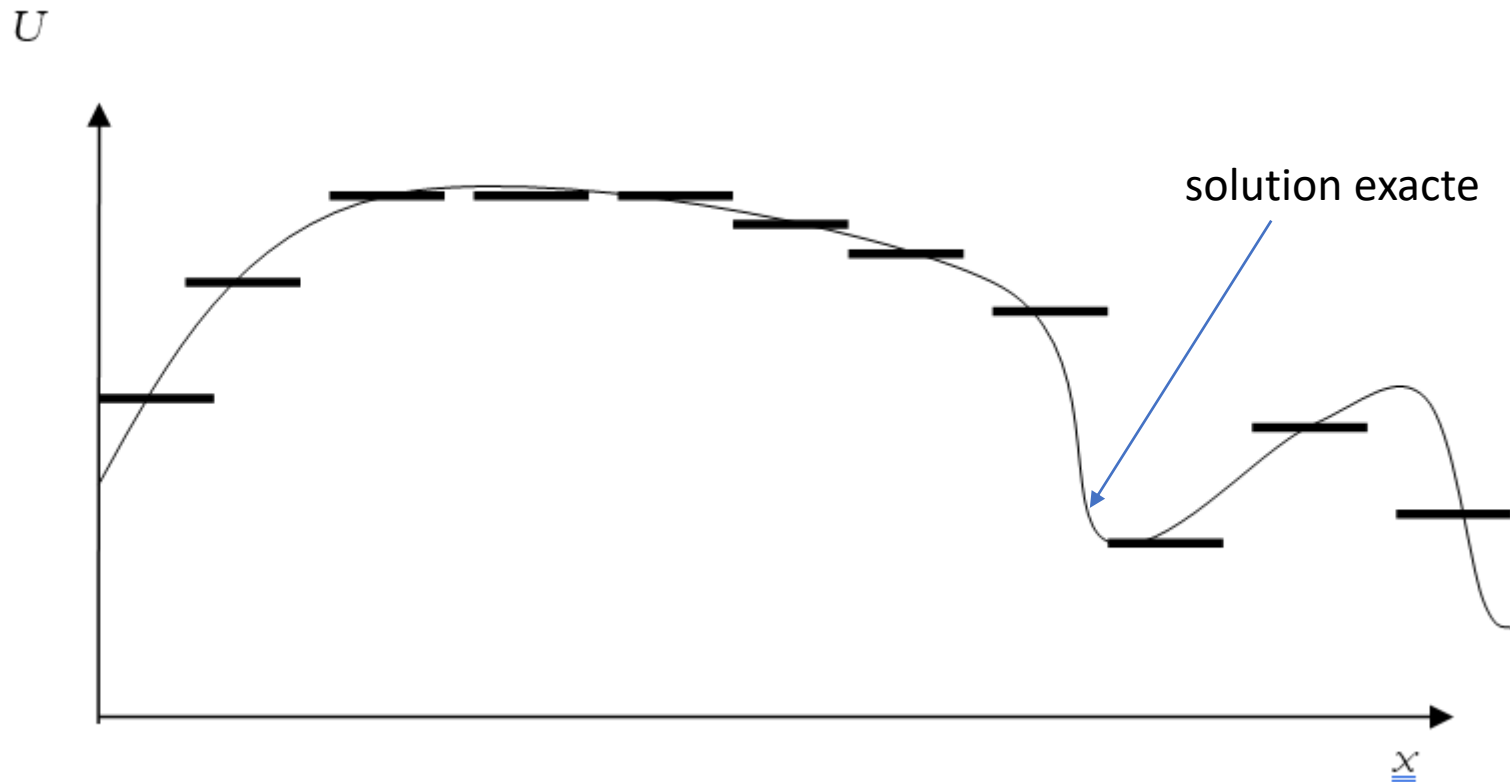
# Fonctions constantes par morceaux



La solution est représentée comme une succession d'états moyens.

$$U_i^n = \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}(x, t_n) dx$$

# Cette représentation n'est pas optimale



Mais si le maillage est fin, la solution converge vers la solution exacte.

On peut aussi adopter une représentation avec des fonctions linéaires par mailles (méthode MUSCL de Van Leer, 1979). Il y a aussi d'autres représentations possibles (WENO, DG..).

Chaque amélioration apporte son lot de complexité et fragilité.

Les bases sont dans tous les cas dans la méthode de Godunov.

# Intégration sur une maille et sur un pas de temps

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = 0$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (U(x, t_{n+1}) - U(x, t_n)) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (F_{i+1/2}(t) - F_{i-1/2}(t)) dt = 0$$

$$\bar{U}_i^n = \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t_n) dx$$

Définition de la valeur moyenne dans la maille i.

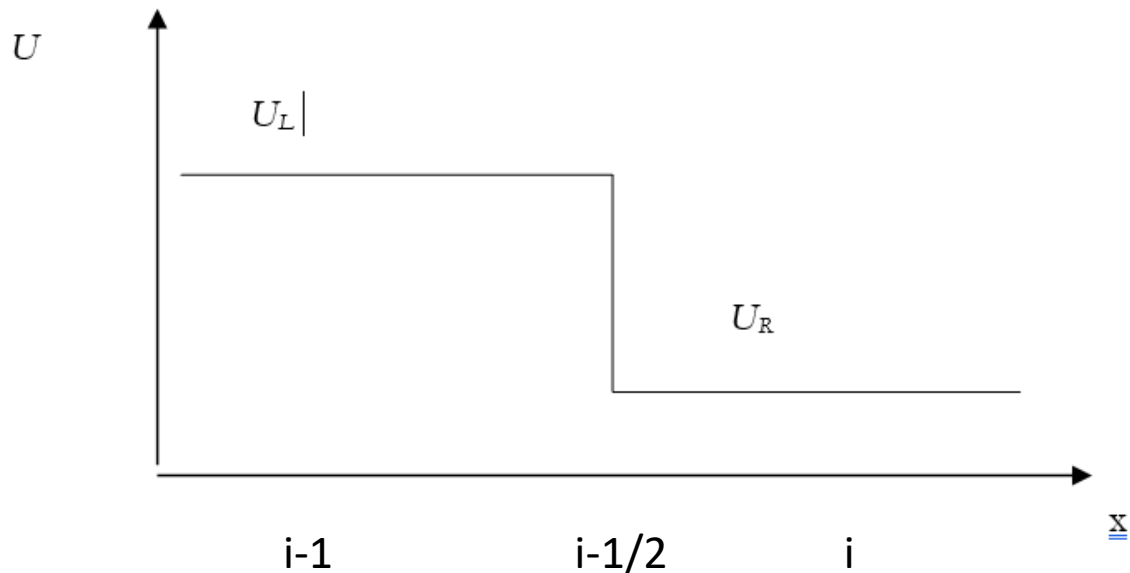
$$\Delta x (\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n) + \Delta t (F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*) = 0 \quad \text{On a supposé que les flux } F^* \text{ sont constants durant } \Delta t.$$

$$\bar{U}_i^{n+1} = \bar{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*)$$

Schéma de Godunov.

Mais comment calcule-t-on  $F^*$  ?

# Discontinuités aux bords de mailles



Puisque la solution est obtenue comme une succession d'états constants (fonction constante par morceaux) comment calculer le flux  $F^*$  sur le bord de maille  $i-1/2$  ? La fonction  $U$  n'est pas définie en ce point et il en est donc de même du flux  $F(U)$ .

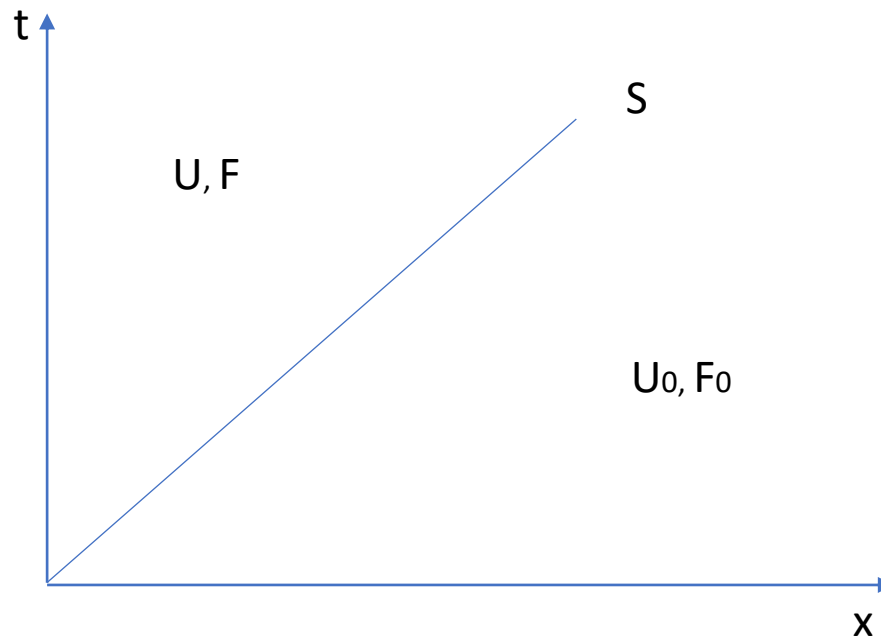
# Relations de Rankine-Hugoniot

Pour résoudre ce problème de calcul de flux sur la discontinuité nous allons utiliser les relations de Rankine Hugoniot,

$$F - SU = F_0 - SU_0$$

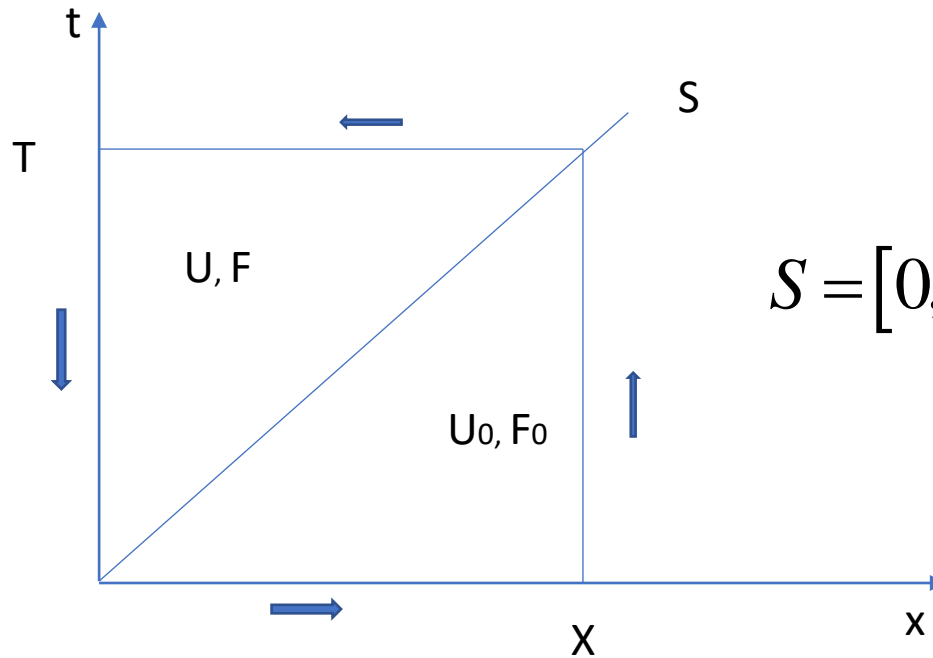
déjà utilisées dans le Chapitre 2, mais non démontrées.

Considérons une discontinuité se propageant à la vitesse  $S$  dans l'état  $0$ , non perturbé:





# Intégration dans l'espace (x,t)



$$S = [0, T] \times [0, X]$$

$$\int_S \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} \right) dS = 0$$

L'intégration directe est problématique, les fonctions étant discontinues.

On va chercher à écrire cette intégrale comme la **circulation** d'un certain vecteur sur le contour délimitant la surface. Il faut pour cela écrire cette intégrale sous la forme

du flux du rotationnel d'un vecteur : 
$$\int_S (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\int_S (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot n dS = 0 \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{t} \quad \vec{A} = A_x \vec{x} + A_t \vec{t}$$

$$\nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{t} & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ A_x & A_t & 0 \end{vmatrix} = z \left( \frac{\partial A_t}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) \quad n = z \quad \text{La normale sort du plan (x,t)}$$

$$\int_S (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot n dS = 0 \quad \text{devient} \quad \int_0^x \int_0^T \left( \frac{\partial A_t}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) dx dt = 0$$

On compare cette formule à  $\int_0^x \int_0^T \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} \right) dx dt = 0$

En identifiant on détermine les composantes du vecteur  $\vec{A}$  :  $A_x = -U$  et  $A_t = F$

Ainsi:  $\vec{A} = -U\vec{x} + F\vec{t}$

# Théorème de Green

Le flux du rotationnel d'un vecteur au travers d'une surface est égal à la circulation de ce vecteur sur le contour de cette surface:

$$\int_S (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot n dS = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{A} d\vec{C} = 0$$

$$\vec{A} = -U\vec{x} + F\vec{t} \quad d\vec{C} = dx \vec{x} + dt \vec{t}$$

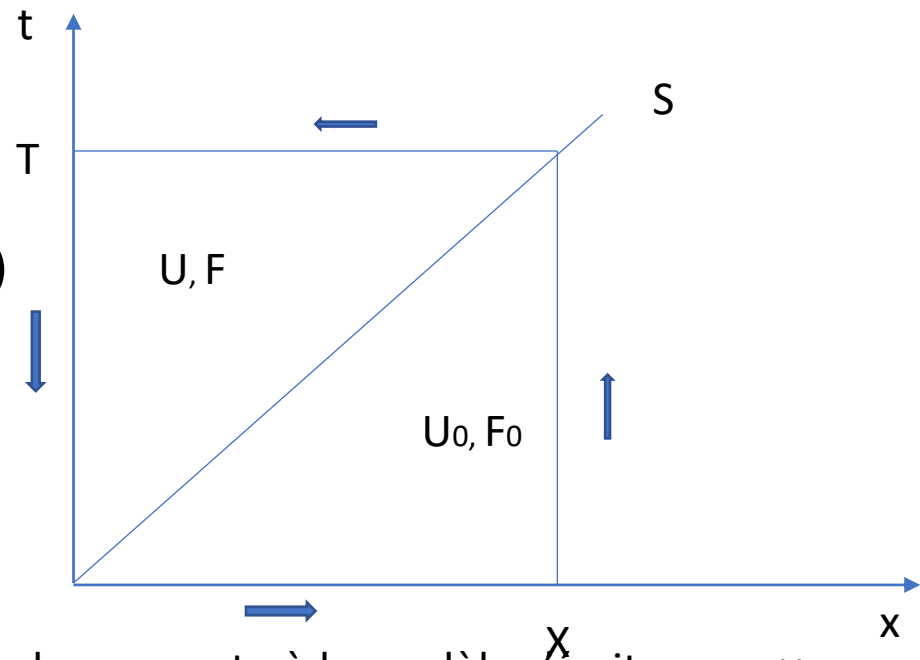
$$\oint (-U dx + F dt) = 0$$

Application à la configuration du schéma :

$$-U_0 X + F_0 T - U(-X) + F(-T) = 0$$

$$F_0 - U_0 \frac{X}{T} = F - U \frac{X}{T}$$

$$F_0 - S U_0 = F - S U$$

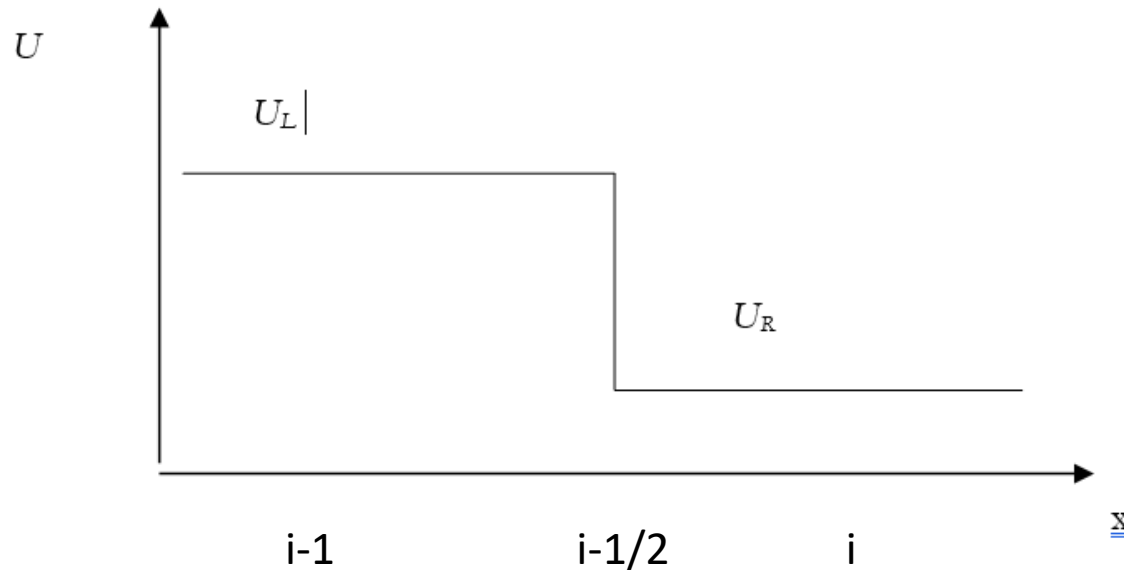


Relations de Rankine Hugoniot... valides à partir du moment où le modèle s'écrit:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

C'est le cas des équations de St Venant, des équations d'Euler et d'autres modèles.

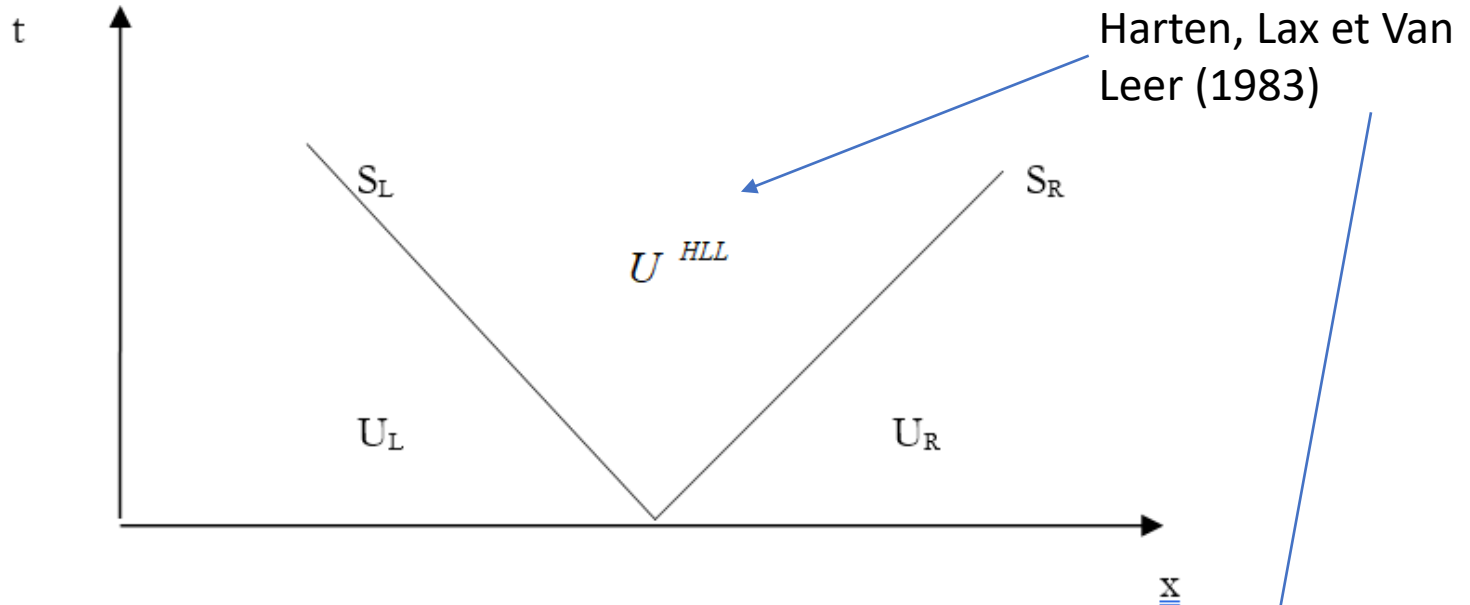
# Retour sur le problème des discontinuités aux bords de mailles



La solution est une succession d'états constants et il y a donc une discontinuité au bord de maille  $i-1/2$ . Comment calculer le flux  $F^*$  en ce point ?

On est face à un problème de type 'tube à choc' en dynamique des gaz ou un problème de rupture de barrage en hydraulique. Rupture de barrage 'généralisé' dans le sens où les fluides dans les deux états  $U_L$  et  $U_R$  ont des vitesses arbitraires.

# Problème de Riemann



Comme dans un problème de rupture de barrage, la discontinuité initiale (celle entre deux mailles à un instant donné) génère une onde qui se propage vers la droite ( $S_R$ ) et une autre qui se propage vers la gauche ( $S_L$ ).

Les relations de passage sont:

$$F_R - S_R U_R = F_{HLL} - S_R U_{HLL}$$

$$F_L - S_L U_L = F_{HLL} - S_L U_{HLL}$$



$$F_{HLL} = \frac{S_L (F_R - S_R U_R) - S_R (F_L - S_L U_L)}{S_L - S_R}$$

# Résumé du schéma de Godunov avec solveur de Riemann HLL

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*)$$

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}$$

$$F_{i+1/2}^* = \frac{S_L (F_{i+1} - S_R U_{i+1}) - S_R (F_i - S_L U_i)}{S_L - S_R}$$

$$F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}$$

$$S_L = \min(u_r - a_r, u_l - a_l)$$

$$S_R = \max(u_r + a_r, u_l + a_l)$$

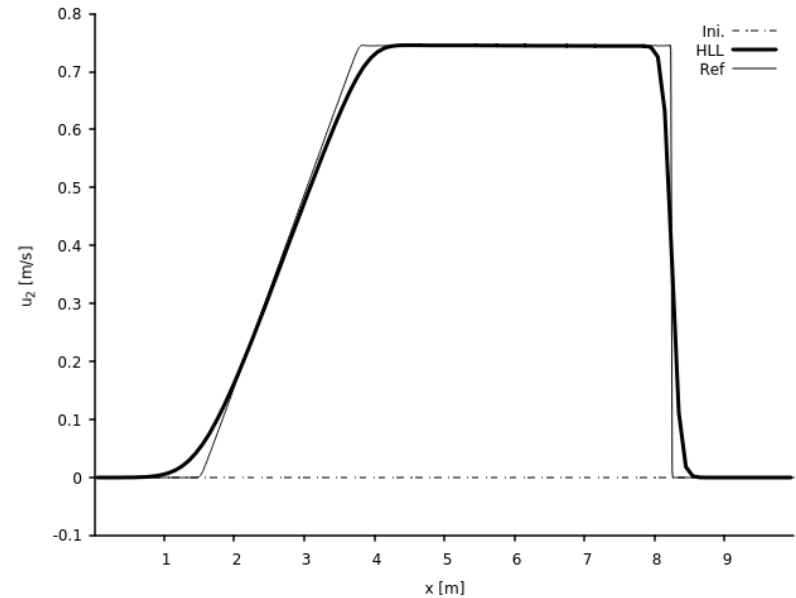
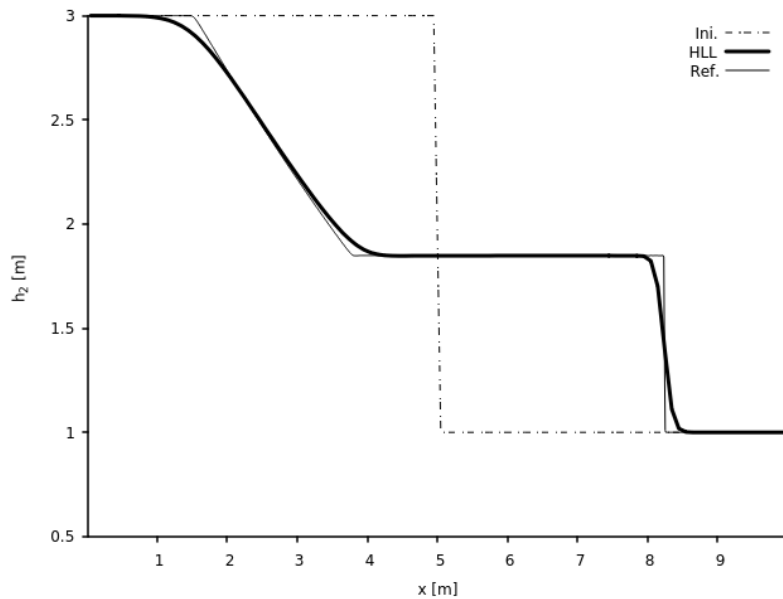
$$a = \sqrt{gh}$$

Il s'agit d'une méthode explicite en temps, stable sous le critère CFL :  $\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x)}{\max(|u|) + a}$

Celui des équations d'Euler est :  $\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x)}{\max(|u|) + c}$   $c_{\text{eau}} \approx 1500 \text{ m/s}$   
 $a \approx 3\sqrt{h} \dots \text{quelques m/s}$

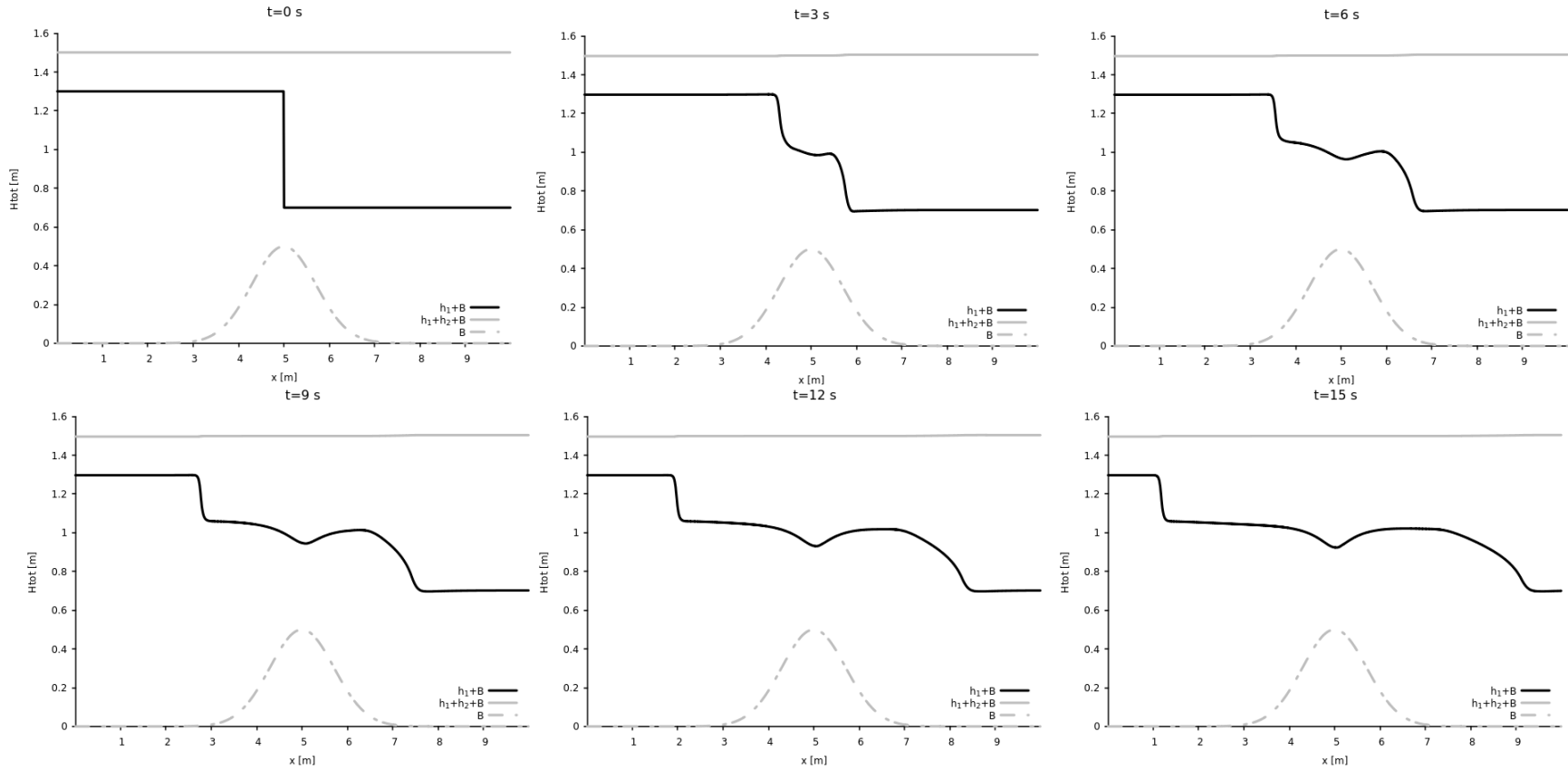
# Quelques exemples

## Rupture de barrage 1D



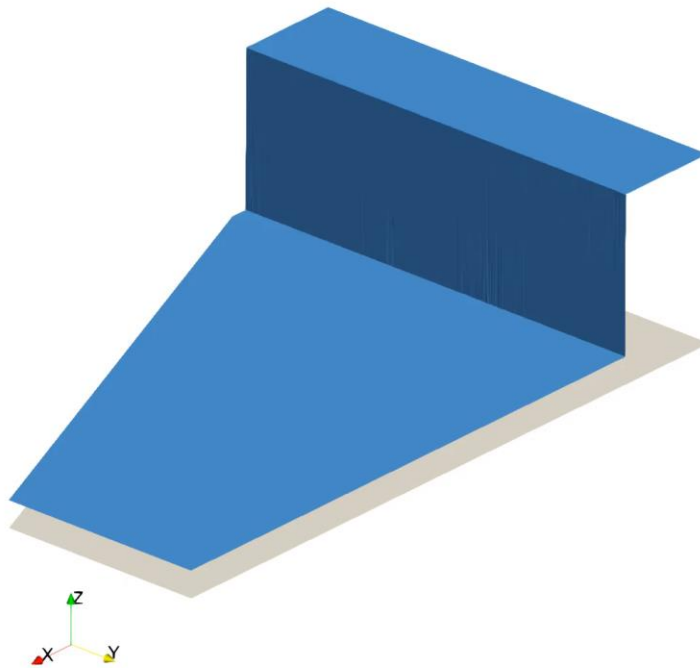
Solution à  $t=1s$  – Maillage comportant 100 cellules.

# Rupture de barrage avec variation de topographie

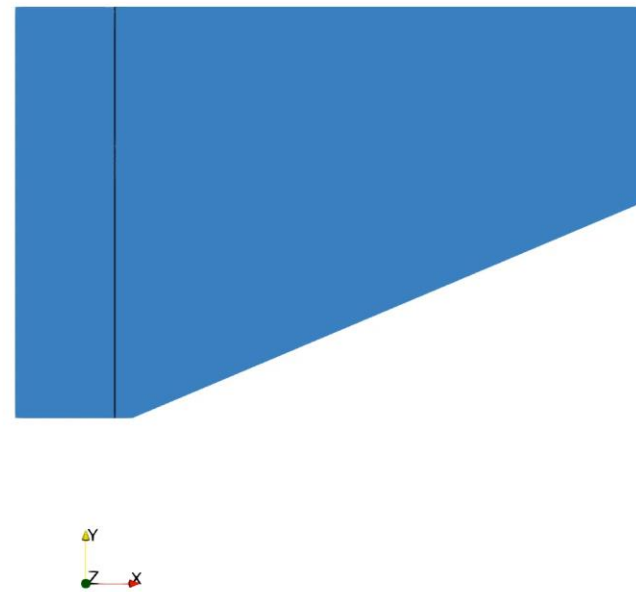


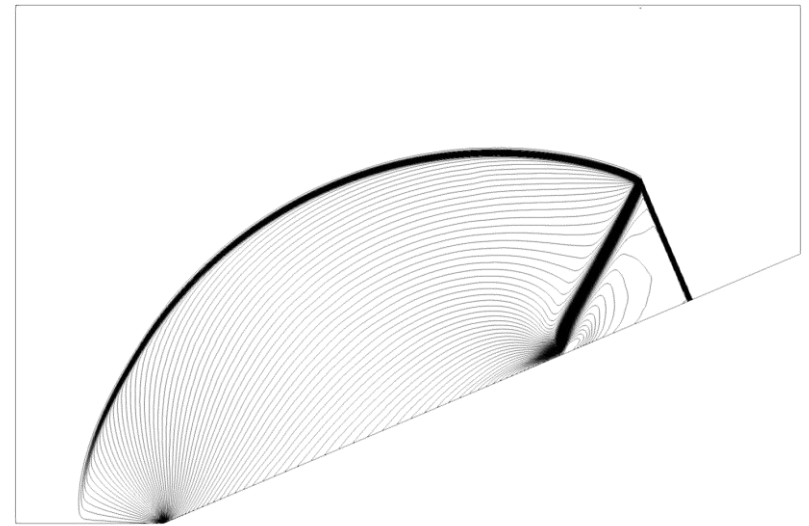
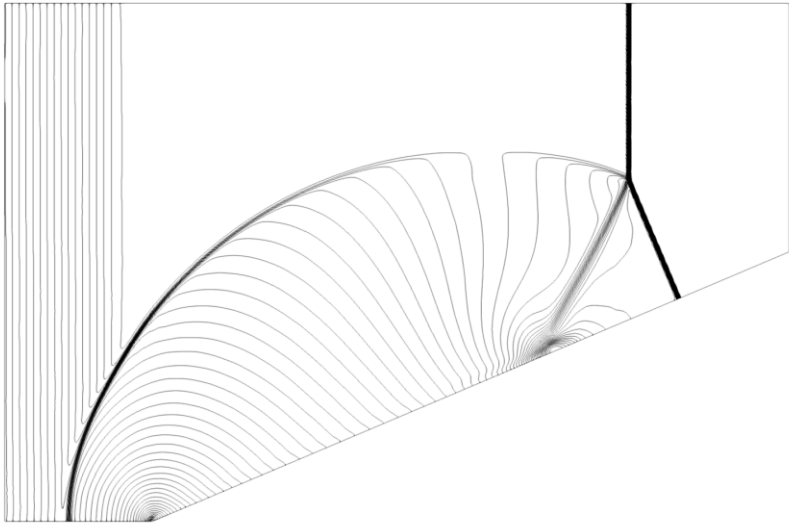
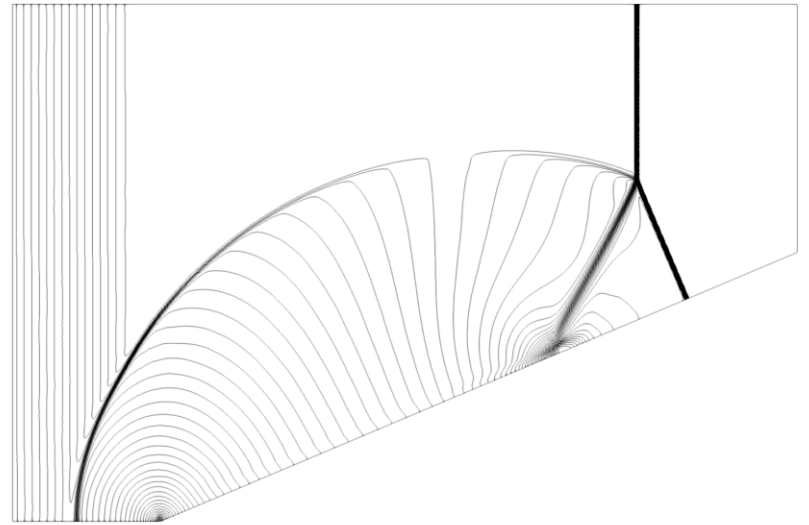
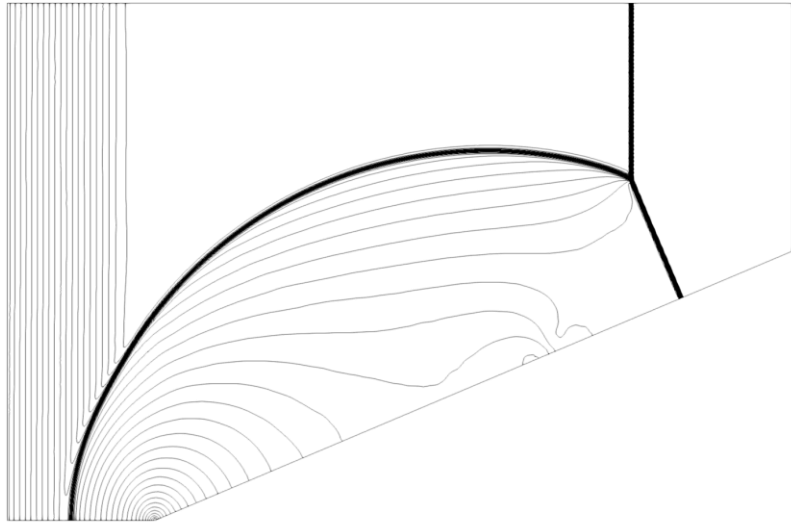


# Rupture de barrage dans un canal convergent



Time (s): 0.000000





# En résumé

On dispose à ce stade:

- Du modèle d'écoulement.
- D'une méthode de résolution numérique.

Il faut maintenant ajouter des effets physiques pour prétendre s'approcher des situations d'inondation:

- Prise en compte du relief.
- Mécanisme de la pluie.
- Effets de la mer.
- Perméation des sols.