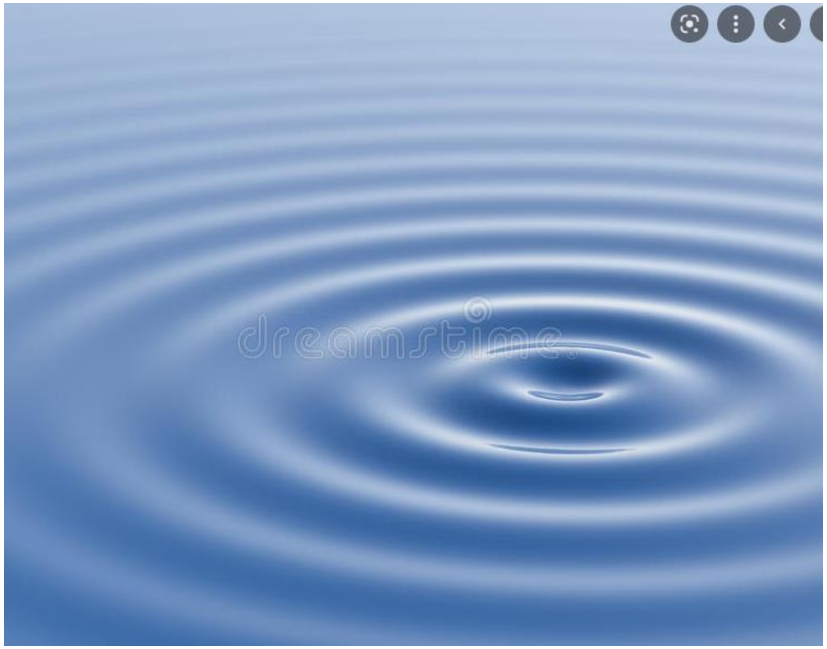
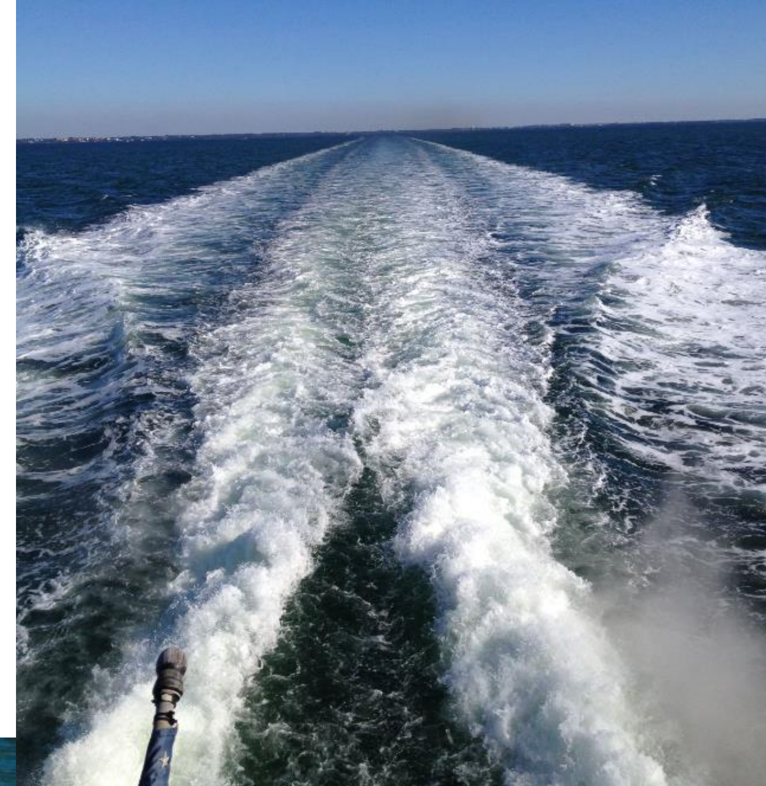
Ondes de surface issues des équations de Saint-Venant

Richard Saurel

Richard.Saurel@univ-amu.fr


dreamstime



Equations de Saint-Venant en variables primitives

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t}+\frac{\partial\left(hu^2+\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x}=0$$

Masse et mouvement en variables conservatives

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

On va chercher à présenter ces équations sous la forme:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+A(W)\frac{\partial W}{\partial x}=0 \qquad W=\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$$

Où A(W) représente la matrice de propagation.
Ceci est une généralisation d’une équation de transport:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+a\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

‘a’ est la vitesse de transport.

Il suffit de développer les équations

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}+A(W)\frac{\partial W}{\partial x}=0$$

$$W=\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

OK

Puis,

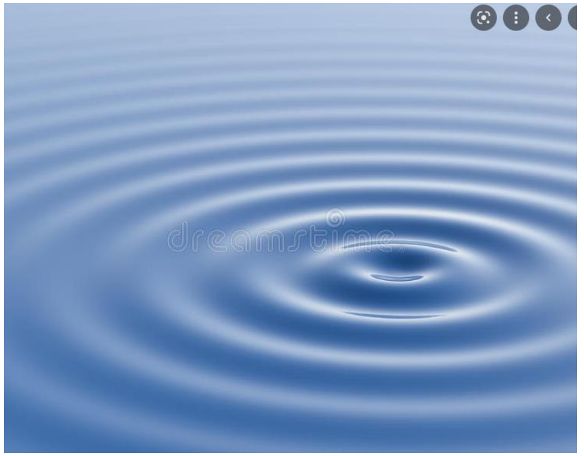
$$\frac{\partial hu}{\partial t}+\frac{\partial\left(hu^2+\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x}=0$$

$$h\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu^2}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial gh^2}{\partial x}=0$$

$$h\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial hu}{\partial x}+hu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}g2h\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

$$h\frac{\partial u}{\partial t}+hu\frac{\partial u}{\partial x}+gh\frac{\partial h}{\partial x}=0 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

On obtient



$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} = 0$$

qui est bien sous la forme

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A(W)\frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

Les valeurs propres de la matrice A(W) correspondent aux vitesses d'ondes.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} u-\lambda & h \\ g & u-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(u-\lambda)^2 - gh = 0$$

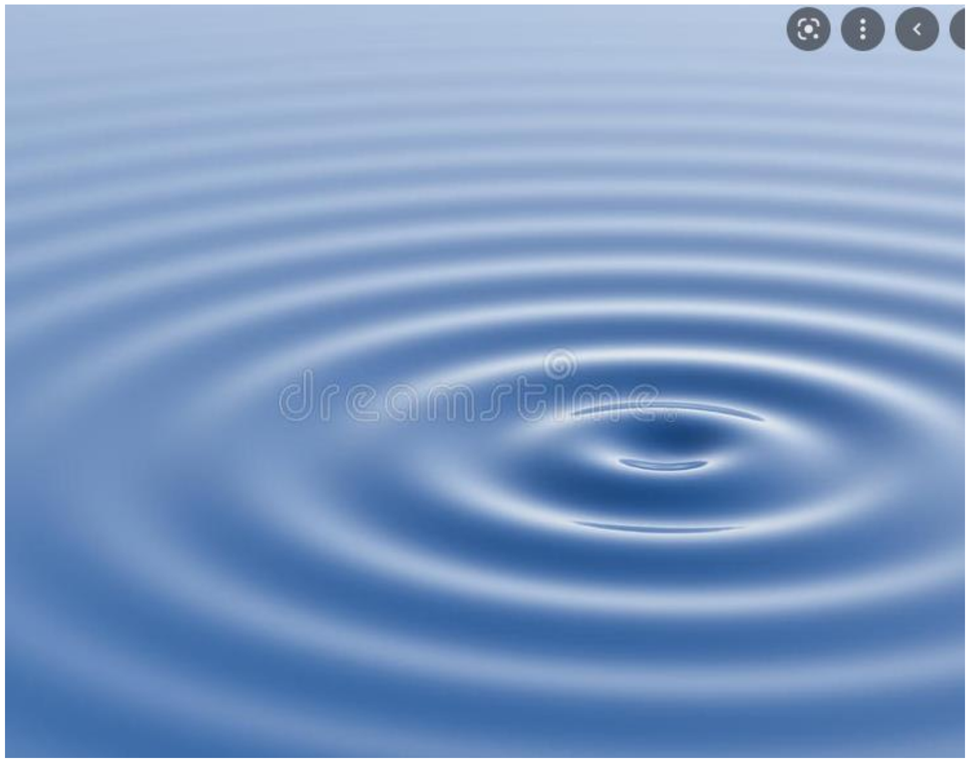
$$\lambda_1 = u + \sqrt{gh}$$

$$\lambda_2 = u - \sqrt{gh}$$

$$a = \sqrt{gh}$$

correspond à l'analogue de la vitesse du son.
Si le fluide est au repos, il s'agit de la vitesse des ondes de surface.

Jet d’un caillou dans un lac au repos



$$\lambda_1 = u + \sqrt{gh}$$

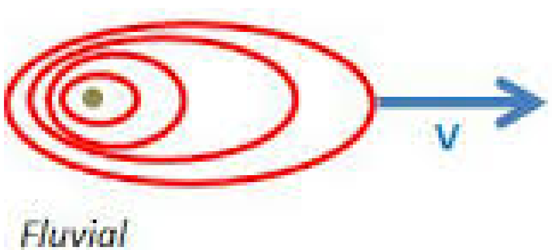
$$\lambda_2 = u - \sqrt{gh}$$

$$u = 0$$

Jet d'un caillou dans un écoulement fluvial

Cette onde remonte lentement dans le fleuve

Cette onde descend plus rapidement dans le fleuve que dans le lac au repos.

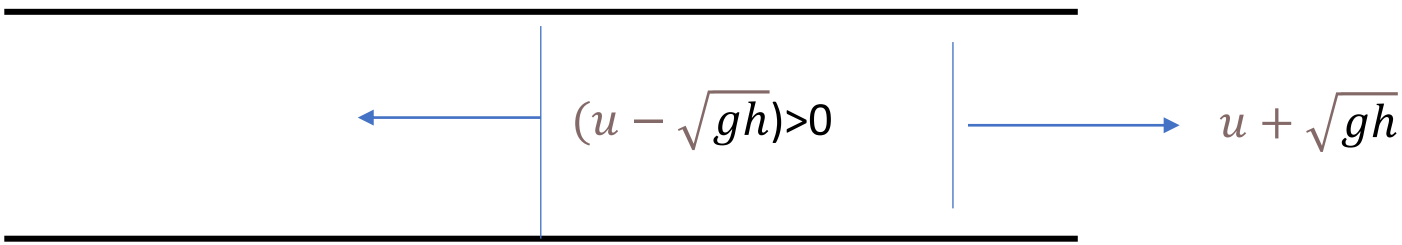


$$\lambda_1 = u + \sqrt{gh}$$
$$\lambda_2 = u - \sqrt{gh}$$

$$\sqrt{gh} > u > 0$$

Les formes d'ondes ne sont plus cylindriques.

Jet d'un caillou dans un écoulement torrentiel



Cette onde fait face à gauche mais est emportée par le courant

Cette onde descend beaucoup plus rapidement dans le fleuve que dans le lac au repos.

$$\lambda_1 = u + \sqrt{gh}$$
$$\lambda_2 = u - \sqrt{gh}$$

$$u > \sqrt{gh}$$

Les formes d'ondes ne sont pas cylindriques et aucune information (onde) ne remonte le courant.

Fluvial vs torrentiel

Fluvial

$$1 > \frac{|u|}{\sqrt{gh}}$$

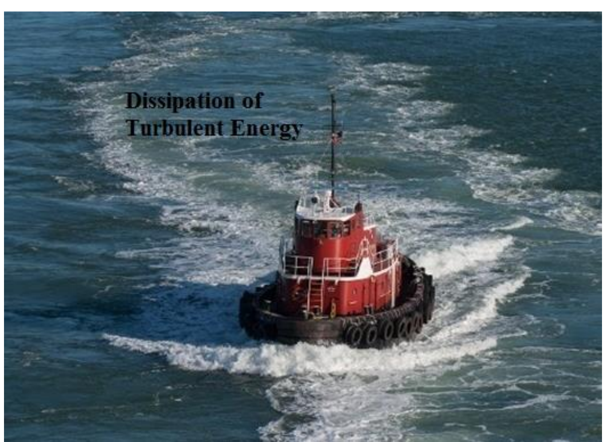
Torrentiel

$$1 < \frac{|u|}{\sqrt{gh}}$$

Or, $\sqrt{gh}$ est la vitesse du ‘son’ des ondes de surface.

Le rapport $\frac{|u|}{\sqrt{gh}}$ ressemble au nombre de Mach.

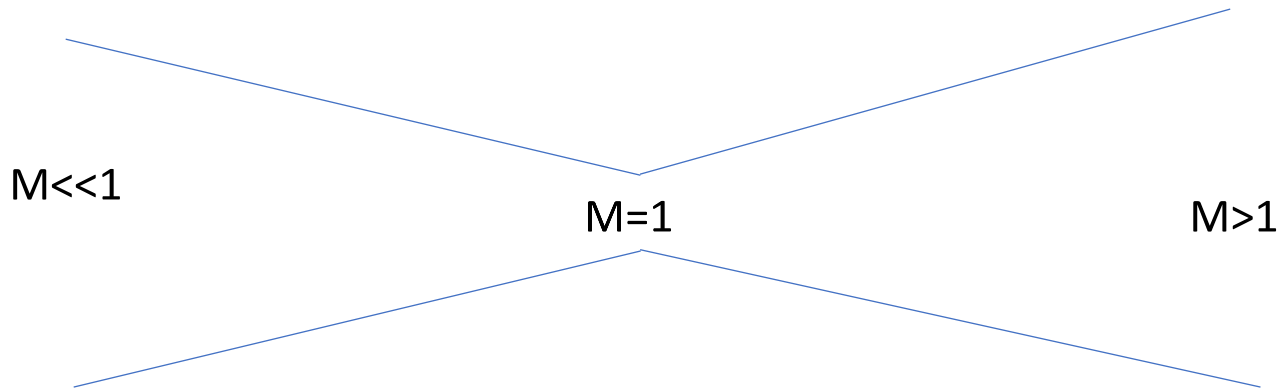
Il s’agit en fait du nombre de Froude $Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}}$ qui joue exactement le même rôle que le nombre de Mach dans les écoulements de fluides compressibles.

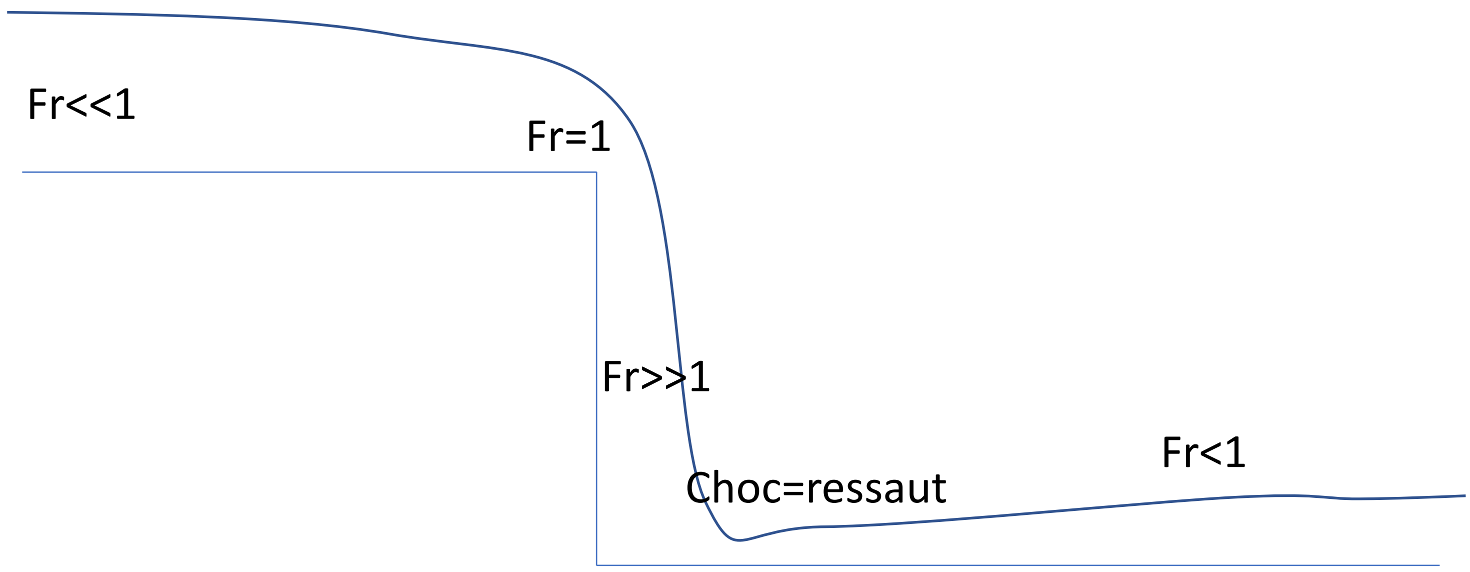


Des ondes devancent le bateau = fluvial.

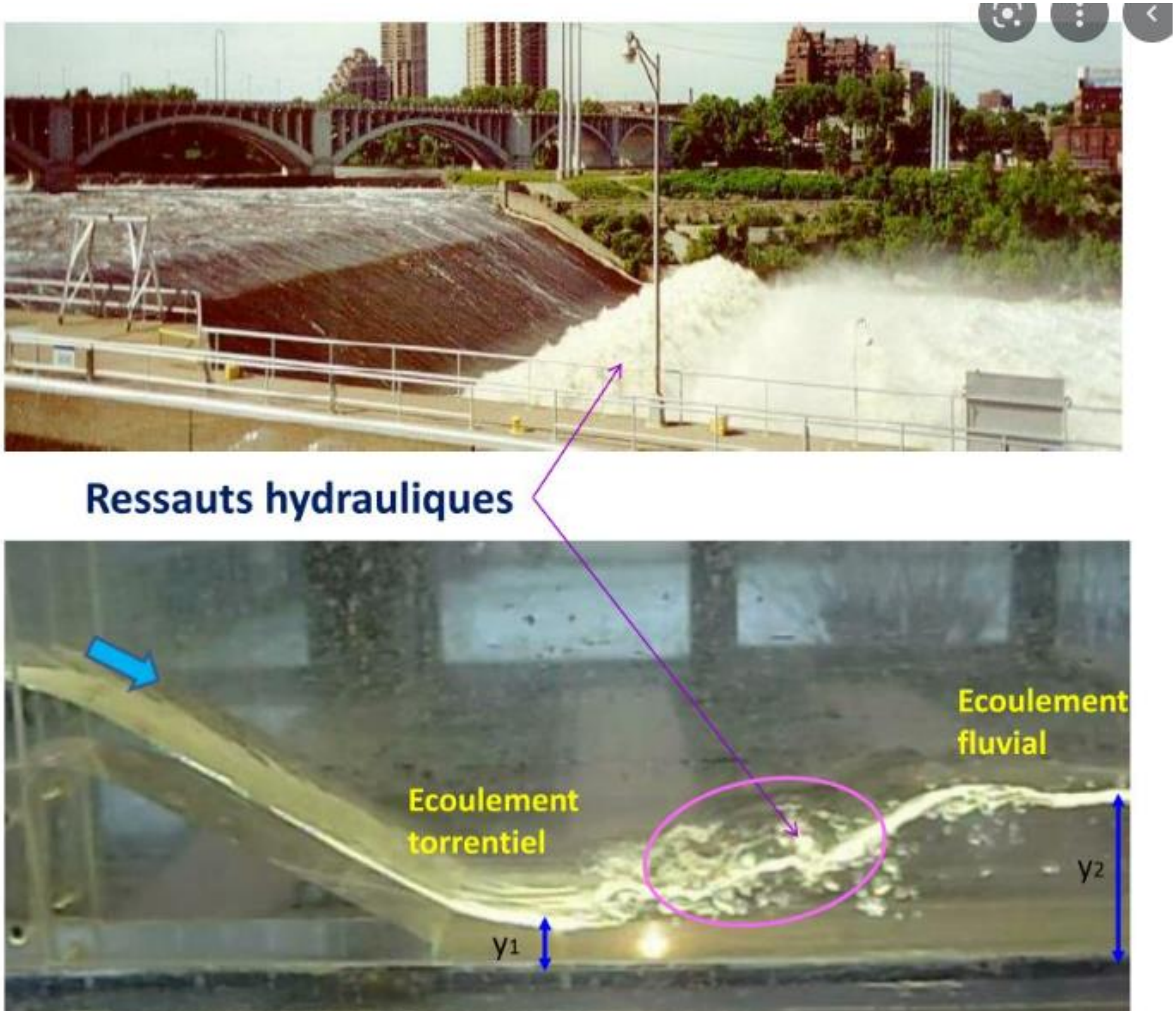
Aucune vague ne précède le bateau= torrentiel.

Analogue des écoulements en tuyères



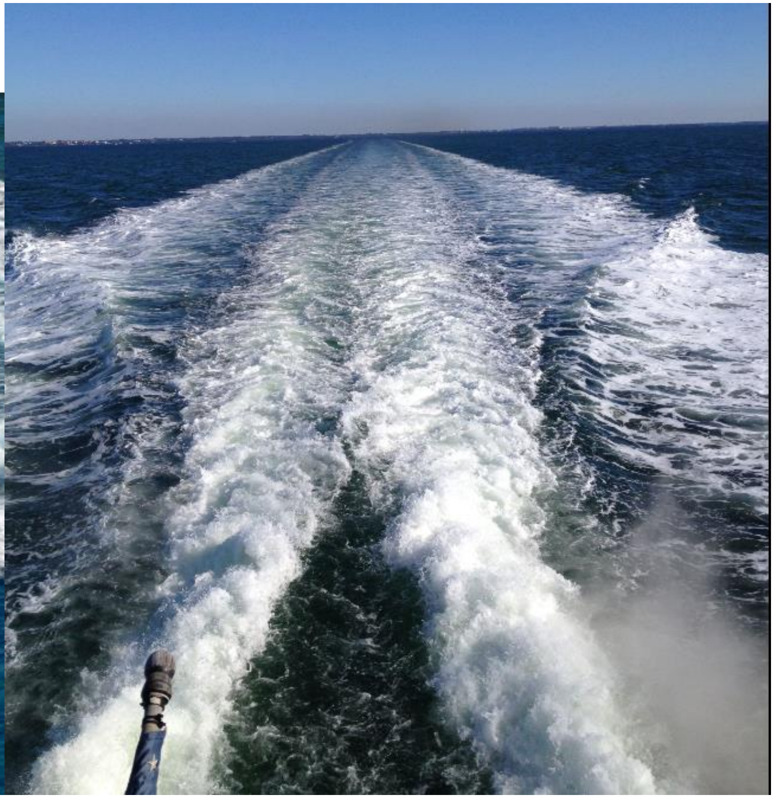


« Tuyères » hydrauliques



Ecoulements autour de profils

Ondes de choc attachées à l'étrave.



Ondes de choc du sillage.

En résumé

Les équations de Saint Venant sont un très bon analogue des équations plus compliquées de la dynamique des gaz (Euler).

Elles permettent de visualiser et de comprendre des phénomènes complexes 2D.

Elles permettent aussi de comprendre l'importance de la propagation des ondes.
La zone sonique isole l'aval de l'amont.
La zone fluviale amont ne saura jamais ce qui se passe en aval.

Ceci s'observe dans les rivières.
Ainsi que dans les tuyères.

Et peut être dans les trous noirs… La lumière aspirée par le trou noir passe de l'autre coté et le coté émetteur (notre univers) ne saura jamais ce qui se passe de l'autre coté.

Ceci remet en cause la théorie de big bang … qui date d'à peine un siècle.

On dispose aussi du modèle d'écoulement adapté pour le traitement des inondations.
En tout cas, d'une partie du modèle…