Etablissement des équations de Saint-Venant (Shallow Water Equations)

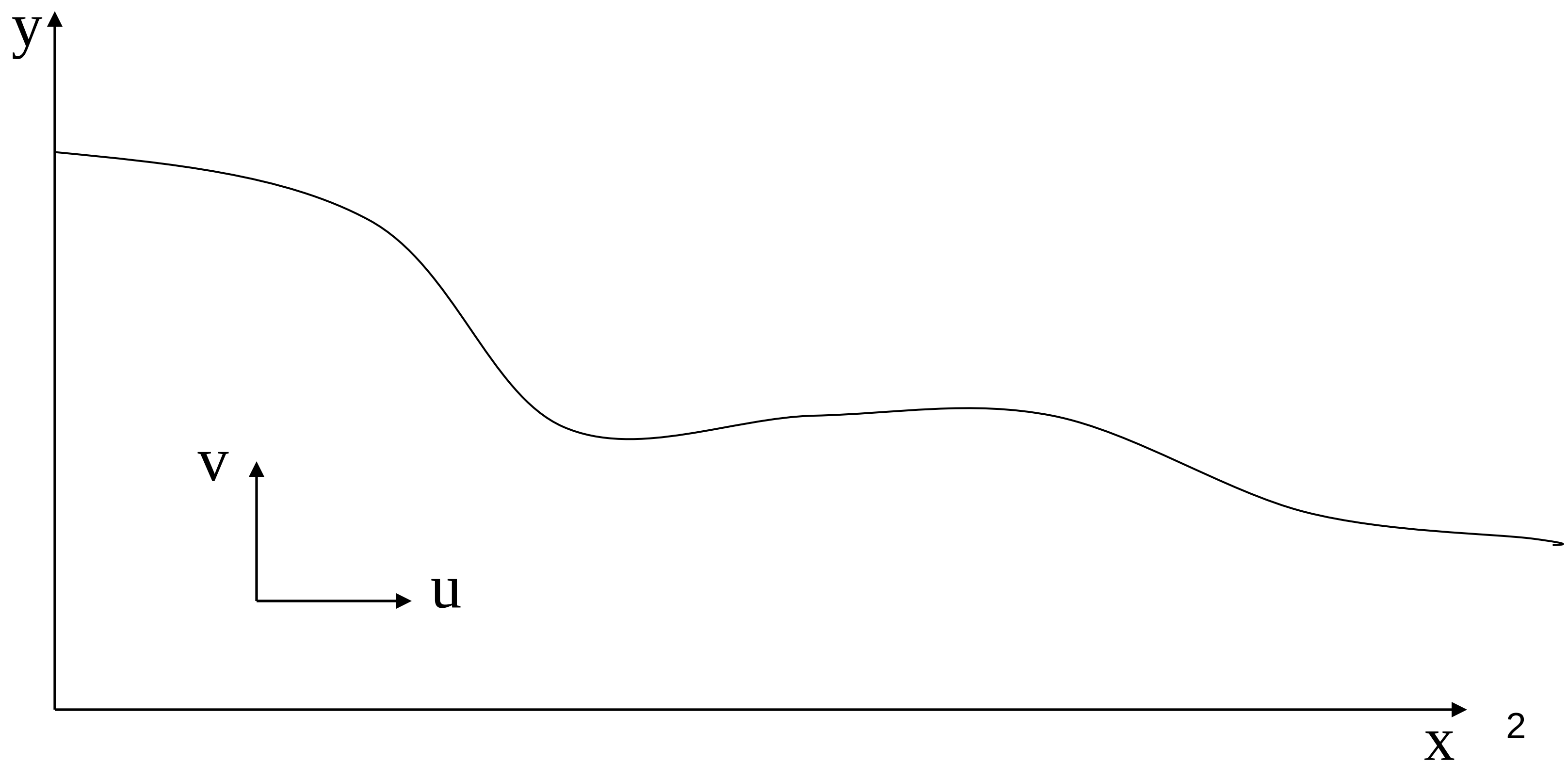
Richard Saurel

Richard.Saurel@univ-amu.fr

Objectifs

Déterminer les équations qui régissent les écoulements dans les rivières par exemple, sans se soucier du mouvement dans la direction verticale.

Il s'agit d'un modèle réduit des équations d'Euler, dont la résolution est largement plus rapide … et plus simple.



Equations d'Euler

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho \vec{u})=0$$ masse

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho \vec{u}\otimes\vec{u})+\mathrm{grad}(p)=0$$ quantité de mouvement

Sous forme développée en 2D:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0$$

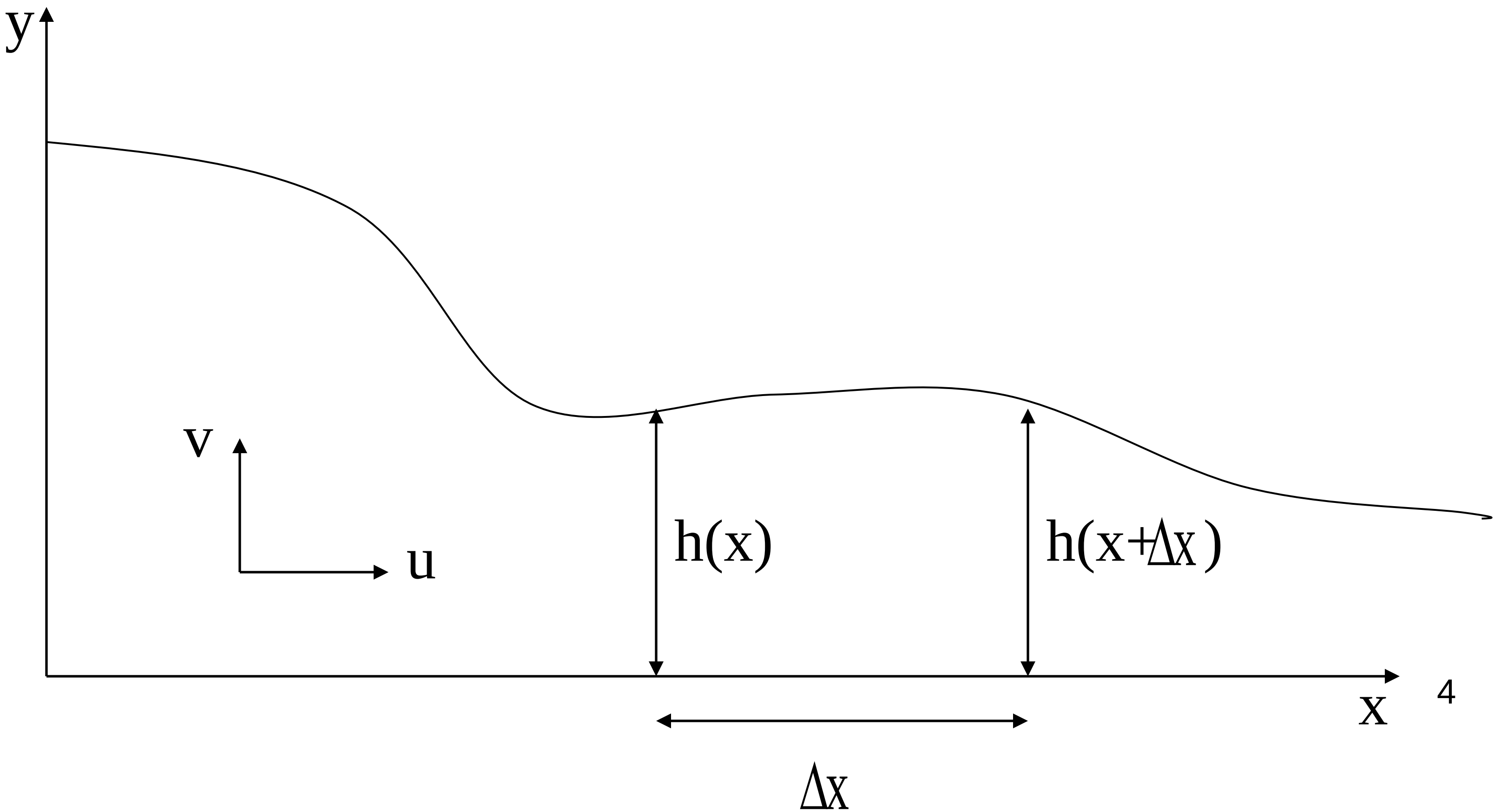
$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial (\rho u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial \rho uv}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t}+\frac{\partial \rho vu}{\partial x}+\frac{\partial (\rho v^2+p)}{\partial y}=0$$

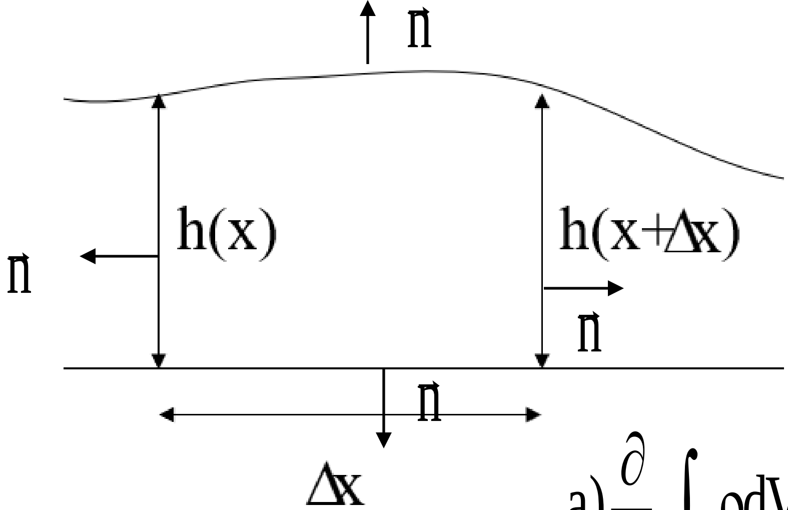
Nécessite un maillage 2D.
Si l'épaisseur de la couche de liquide est faible, le maillage devra être fin.
Le pas de temps est tel que (critère CFL):

$$\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x,\Delta y)}{\max(|u|,|v|)+c}$$

Intégration de l'équation de masse sur la hauteur



$$\int_0^{h(x)} \int_x^{x+\Delta x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) \right) dx\,dy = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) \right) dV = 0$$



$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) \right) dV = 0$$

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{u}.\vec{n} dS = 0$$

Gauss

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho dV - \int_S \rho \vec{S}.\vec{n} dS + \int_S \rho \vec{u}.\vec{n} dS = 0$$

Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho dV + \int_S \rho (\vec{u} - \vec{S}).\vec{n} dS = 0$$

$$a) \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho dV = \frac{\partial \bar{\rho} V}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\rho} \Delta x \, \bar{h}}{\partial t}$$

$$b) \int_S \rho (\vec{u} - \vec{S}).\vec{n} dS =$$

$$-\rho(x) u(x) h(x) + \rho(x+\Delta x) u(x+\Delta x) h(x+\Delta x)$$

Sur la surface inférieure le flux de masse est nul (condition de glissement).

Sur la surface supérieure $\vec{u} = \vec{S}$ ce qui implique un flux de masse nul aussi au travers de la surface mobile.

On assemble les deux intégrales

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V(t)} \rho dV + \int_S \rho(\vec{u}-\vec{S}).\vec{n} dS = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \Delta x \bar{h}}{\partial t} - \rho(x)u(x)h(x) + \rho(x+\Delta x)u(x+\Delta x)h(x+\Delta x) = 0$$

$$\Delta x \frac{\partial \bar{\rho} \bar{h}}{\partial t} - \left((\rho uh)(x) - (\rho uh)(x+\Delta x)\right) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{h}}{\partial t} + \frac{\left((\rho uh)(x+\Delta x) - (\rho uh)(x)\right)}{\Delta x} = 0$$

$$\Delta x --> 0 \qquad \frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial (\rho uh)}{\partial x} = 0$$

On considère maintenant le fluide incompressible:

$$\rho = cste$$

L'équation de bilan de masse exprime alors l'évolution de la hauteur d'eau:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0}$$

Equation du mouvement

On part des équations du mouvement d'Euler:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial \rho uv}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t}+\frac{\partial \rho vu}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2+p)}{\partial y}=0$$

On ajoute la gravité et on néglige la composante verticale v:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\rho g \longrightarrow p_h-p=-\rho g(h-y) \longrightarrow p=p_{atm}+\rho g(h-y)$$

$$\text{Or } p_h=p_{atm}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}=0$$

$$p=p_{atm}+\rho g(h-y)$$

On considère maintenant l'équation de masse $$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}=0$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \longrightarrow \rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

On insère maintenant

$$p=p_{atm}+\rho g(h-y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(p_{atm}+\rho g(h-y)\right)}{\partial x}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}=0}$$

Forme conservative de l'équation du mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}=0$$ on multiplie cette équation par h

$$h\frac{\partial u}{\partial t}+hu\frac{\partial u}{\partial x}+hg\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t}-u\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu^2}{\partial x}-u\frac{\partial hu}{\partial x}+\frac{\partial \frac{1}{2}gh^2}{\partial x}=0$$ or $$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t}+\frac{\partial\left(hu^2+\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x}=0$$

Equations de Saint-Venant pour un bassin à fond plat

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}=0$$ masse

$$\frac{\partial hu}{\partial t}+\frac{\partial\left(hu^2+\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x}=0$$ quantité de mouvement

Conditions d'interface ou relations de saut

Pour n'importe quelle équation sous la forme:

$$\int_{V(t)} \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \vec{F}.\vec{n} dS = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial U}{\partial t} + \mathrm{div}(F) = 0$$

Les relations de saut (ou conditions d'interface) s'écrivent:

$$\vec{F}.\vec{n} - U\vec{S}.\vec{n} = cste$$

où $\vec{S}$ est la vitesse de l'interface.

Voir cours de SMNE ou démonstration plus tard.

Pour s’en souvenir rapidement

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t}+\frac{\partial\left(hu^2+\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x}=0$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

relations de saut

$$F-SU=cste$$

$$h_1(u_1-S)=h_2(u_2-S)$$

$$h_1u_1(u_1-S)+\frac{1}{2}gh_1^2=h_2u_2(u_2-S)+\frac{1}{2}gh_2^2$$

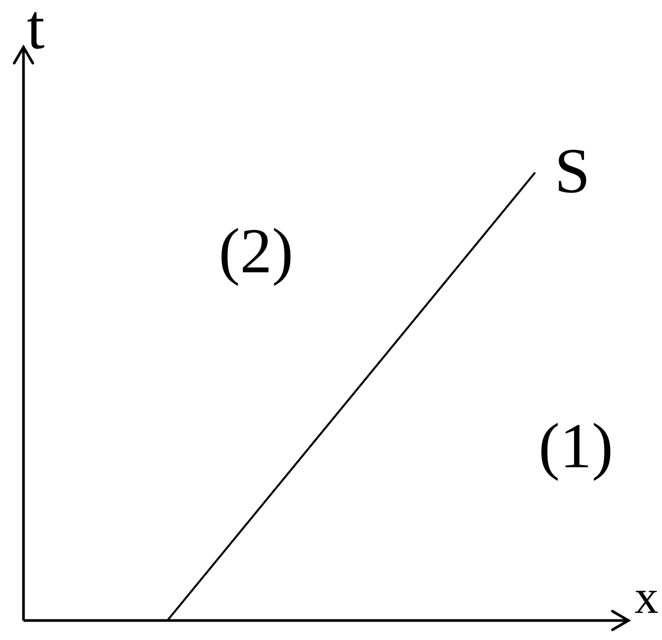
Analyse de ces conditions d'interface

Premier cas: fronts supersoniques par rapport au milieu dans lequel l'onde se propage→ ondes de choc = les conditions d'interface reviennent au relations de Rankine-Hugoniot (des équations de Saint Venant),

$$h_1(u_1 - S) = h_2(u_2 - S)$$

$$h_1 u_1(u_1 - S) + \frac{1}{2} g h_1^2 = h_2 u_2(u_2 - S) + \frac{1}{2} g h_2^2$$

Le milieu (1) est l'état initial, et le milieu 2 correspond à l'état post-choc.



Le milieu (1) est parfaitement connu.

Les inconnues du système sont:

$$h_2 \ ; u_2 \ ; S$$

Chocs (ou ressaut hydraulique)→ 3 inconnues et 2 relations

$$h_2 \;;u_2 \;;S$$

$$h_1(u_1 - S) = h_2(u_2 - S)$$
$$h_1u_1(u_1 - S) + \frac{1}{2}gh_1^2 = h_2u_2(u_2 - S) + \frac{1}{2}gh_2^2$$

Donc 2 relations et 3 inconnues → famille de solutions.
Il faudra fixer une variable dans l'état (2) et toutes les autres s'en déduiront.
Par exemple fixer la vitesse du choc S, ou la vitesse du piston u_2 …
N'importe quelle variable dans l'état 2 fixe les autres, c'est pourquoi on parle de 'famille de solutions'.

Exemples

Vague de marée montante

Avalanche: plus compliqué en raison des frottements avec le sol et de la rugosité de sa surface. Choc sur fond rugueux avec frottement induisant de la turbulence

Surface de contact

Deuxième cas: la vitesse du front est égale à la vitesse du fluide.

$$h_1(u_1 - S) = h_2(u_2 - S)$$

$$h_1 u_1(u_1 - S) + \frac{1}{2} g h_1^2 = h_2 u_2(u_2 - S) + \frac{1}{2} g h_2^2$$

Considérons,

$$S = u_1$$

Alors, $0 = h_2(u_2 - S)$

Et donc,

$$S = u_2$$

Ainsi: $u_1 = u_2$ la vitesse est constante au travers de l'onde de contact.

On insère les résultats précédents dans la condition d'interface de la qdm

$$h_1 u_1 (u_1 - S) + \frac{1}{2} g h_1^2 = h_2 u_2 (u_2 - S) + \frac{1}{2} g h_2^2$$

$$\frac{1}{2} g h_1^2 = \frac{1}{2} g h_2^2$$

$$h_1 = h_2$$

La hauteur est constante au travers de l'onde de contact.

L'onde de contact est transparente: il n'y a aucune variation de vitesse ni de hauteur.

Relations de saut

Chocs (ressauts)

$$h_1(u_1 - S) = h_2(u_2 - S)$$

$$h_1 u_1 (u_1 - S) + \frac{1}{2} g h_1^2 = h_2 u_2 (u_2 - S) + \frac{1}{2} g h_2^2$$

Contact

$$u_1 = u_2$$

$$h_1 = h_2$$